# Sciences orientation logicielle 2

# Support du cours

Enseignant : Niklaus Eggenberg

Email : niklaus.eggenberg@hesge.ch

Support du cours : www.eswys.ch/hepia

# Quelques références

Voici une liste non-exhaustive de liens qui ont été utiles à l'élaboration du présent cours et qui constituent à la fois des références et un complément au présent cours :


file:///C:/eSwys/HEPIA/2019-2020/Maths%20Discr%C3%A8tes/R%C3%A9f%C3%A9rences/Chapitre1.pdf
file:///C:/eSwys/HEPIA/2019-2020/Maths%20Discr%C3%A8tes/R%C3%A9f%C3%A9rences/Chapitre2.pdf
file:///C:/eSwys/HEPIA/2019-2020/Maths%20Discr%C3%A8tes/R%C3%A9f%C3%A9rences/Chapitre3.pdf
file:///C:/eSwys/HEPIA/2019-2020/Maths%20Discr%C3%A8tes/R%C3%A9f%C3%A9rences/Chapitre4.pdf

# Chapitre 1

# Optimisation linéaire

# Problème d’optimisation

Un problème d’optimisation consiste à trouver la meilleure solution possible à un problème selon une mesure qualitative.

Nous appellerons :

- *Problème* le problème à résoudre
- *Solution* est une solution admissible au problème
- *Fonction objectif* la mesure qualitative d’une solution
- *Solution optimale* une solution telle qu’il n’existe aucune solution avec une «meilleure» valeur de la fonction objectif.

# Notations

- $P$ est le problème en question,

- $s$ est une solution du problème d'optimisation et $S$ est l'ensemble de toutes les solutions «admissibles» (légales) au problème $P$,

- $f$ dénote la fonction objectif et $f(s)$ est la valeur «qualitative» d'une solution,

- Une solution optimale au problème $P$ est écrite comme $s^* \in S$ et vérifie

$$f(s^*) = \min_{s \in S} f(s).$$

# Minimisation ou maximisation

Notez que tout problème de MAXIMISATION peut s’écrire sous forme de minimisation :

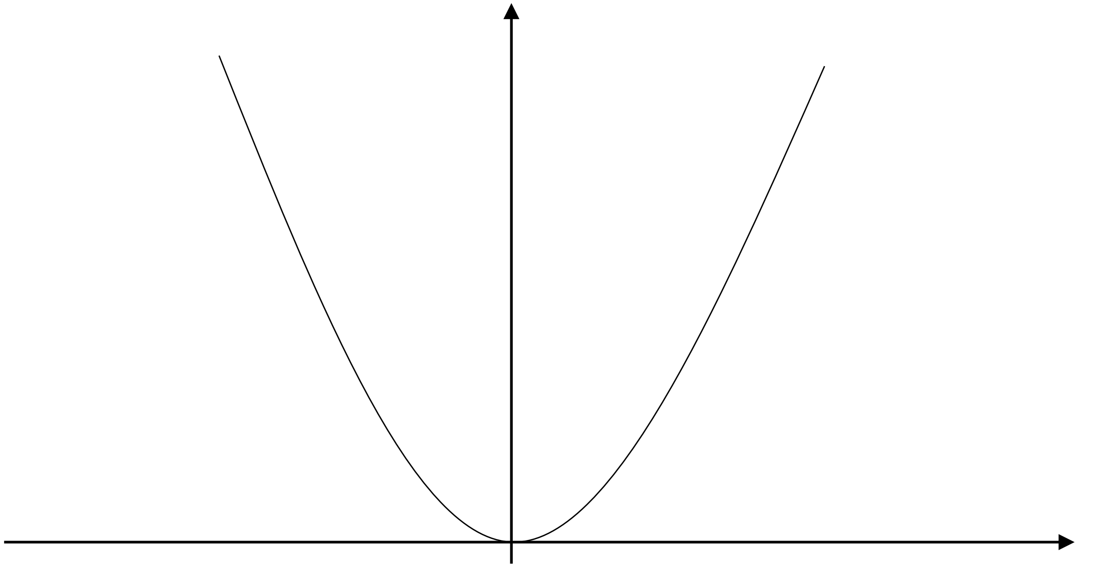
$$\max_{s \in S} f(s) = \min_{s \in S}(-f(s)) \,.$$

Sans perte de généralité, nous parlerons donc toujours de problèmes de minimisation (sauf précision).

# Exemples

Minimiser la fonction suivante $f(s) = s^2$ : $\min_{s \in \mathbb{R}} f(s)$

Nous pouvons résoudre ce problème graphiquement :



La solution optimale est $s^* = 0$ avec $f(s^*) = 0$.

# Exemples

Minimiser la fonction suivante $f(s) = \frac{s}{2}$.
Dans ce cas, $\min_{s \in \mathbb{R}} f(s)$ n'est pas défini, en effet la solution serait $s^* = -\infty$ !

Dans ce cas, nous pouvons en revanche ajouter des ***contraintes*** à notre problème, comme par exemple

$$\min_{s \in [-5, +\infty]} f(s) .$$

Dans ce cas, la solution est $s^* = -5$ et $f(s^*) = -2.5$ !

# Optimisation – solution optimale

Une solution optimale $s^*$ satisfait

$$f(s^*) \leq f(s), \forall s \in S$$

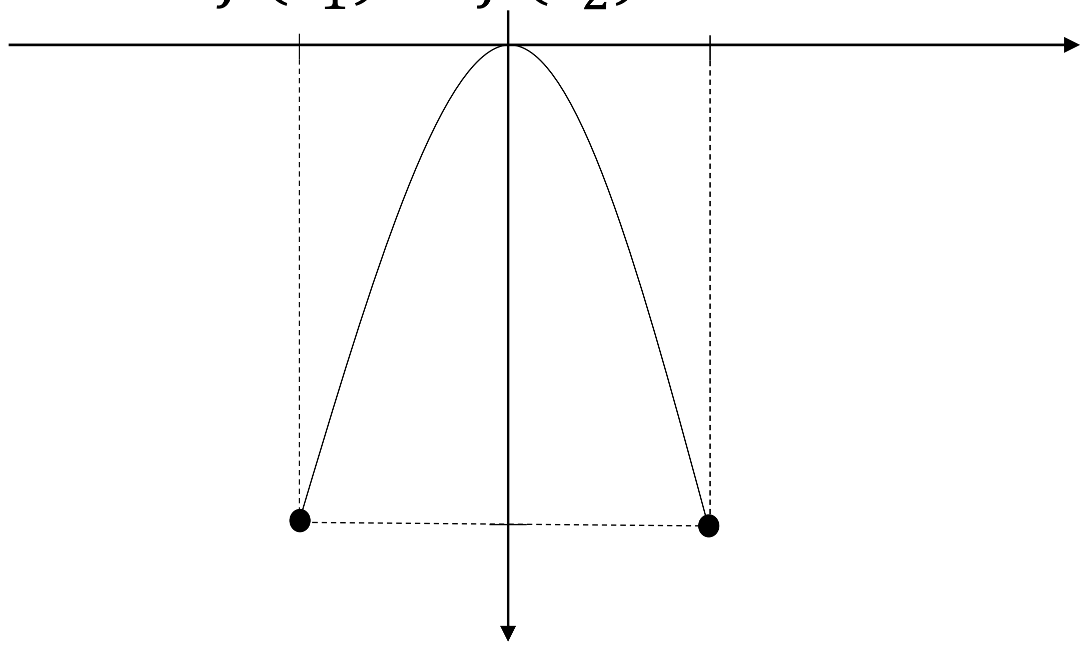
En revanche, il se peut parfaitement que $s^*$ ne soit pas unique.

Exemple : $\min_{s \in [-5,5]} -s^2$

# Optimisation – solution optimale

Exemple : $\min\limits_{s \in [-5,5]} -s^2$ a 2 solutions optimales,
$s_1^* = -5$ et $s_2^* = +5$ avec

$$f(s_1^*) = f(s_2^*) = -25$$



# Optimisation - Modélisation

Les problèmes d’optimisation doivent être ***modélisés*** sous forme mathématique.

Il faut donc :

1. Déterminer les ***variables de décision***,
2. Déterminer la ***fonction objectif***,
3. Déterminer les contraintes sur les variables.

# Exemple

Soit le problème d’optimisation de portefeuille suivant :

Soit un nombre d’actions $i = 1, \dots, n$ dont le prix d’achat est de $p_i, i = 1, \dots, n$ et dont le profit estimé est de $\rho_i, i = 1, \dots, n$.

Nous disposons d’un budget maximum de $B$ unités à investir.

Comment modéliser ce problème sous forme mathématique ?

# Exemple – optimisation de portefeuille

**Variables de décision :**
$x_i =$ nombre d'actions achetées pour l'action $i = 1, \dots, n$

**Fonction objectif :**
L'objectif est de maximiser le profit. Pour chaque action, le profit est donné par $\rho_i \times x_i, i = 1, \dots, n.$

Cela donne donc la fonction suivante (à maximiser)

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i \times x_i \,.$$

# Exemple – optimisation de portefeuille

**Contraintes :**
Nous avons un budget fixe. Le prix total d'achat de chaque action est de $p_i \times x_i, i = 1, \ldots, n.$

Nous avons donc que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i \leq B.$$

# Exemple – optimisation de portefeuille

**Problème d'optimisation**

Le problème d'optimisation est donc

$$\min\left(-\sum_{i=1}^{n} \rho_i \times x_i\right)$$

$$\textit{Sous contraintes :}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i \leq B.$$

$$x_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n.$$

# Exemple – optimisation de portefeuille

Il s'agit donc d'un problème de maximisation avec $n$ variables et une seule contrainte.

Comment résoudre ce problème ?

# Exemple – optimisation de portefeuille

La solution optimale est de prendre le plus d'actions possibles de l'action ayant le meilleur rapport qualité-prix. Il faut donc trouver une action $i^* \in \{1, \dots, n\}$ telle que

$$\frac{\rho_{i^*}}{p_{i^*}} = \min_{i=1,\dots,n} \left(\frac{\rho_i}{p_i}\right).$$

Notez que $i^*$ n'est pas forcément unique…

Une solution optimale sera alors

$$\begin{cases} x_{i^*} = B/p_{i^*} \\ x_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i^*\}. \end{cases}$$

La fonction objectif aura pour valeur $\rho_{i^*} \times x_{i^*}$.

# Exercice numérique

Trouvez un portefeuille optimal avec les actions suivantes et un budget de $B = 1000$ :

| $\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{\rho_i}$ | $\boldsymbol{p_i}$ |
|---|---|---|
| 1 | 115 | 75 |
| 2 | 103 | 40 |
| 3 | 206 | 90 |
| 4 | 32 | 38 |
| 5 | 115 | 74 |
| 6 | 74 | 35 |
| 7 | 154.5 | 60 |

# Exercice numérique

Résolution – Calculons les rapports $\frac{\rho_i}{p_i}$

| $\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{\rho_i}$ | $\boldsymbol{p_i}$ | $\boldsymbol{\rho_i/p_i}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 115 | 75 | 1.533 |
| 2 | 103 | 40 | **2.575** |
| 3 | 206 | 90 | 2.289 |
| 4 | 32 | 38 | 0.842 |
| 5 | 115 | 74 | 1.554 |
| 6 | 74 | 35 | 2.114 |
| 7 | 154.5 | 60 | **2.575** |

# Exercice numérique

Il y a donc 2 actions «optimales», 2 et 7, avec retour sur investissement optimal

$$\frac{\rho_2}{p_2} = \frac{\rho_7}{p_7} = 2.575$$

Un solution optimale sera alors
$x_2^* = \frac{1000}{p_2} = 25.00$ et $x_1^* = x_3^* = x_4^* = \cdots = x_7^* = 0$.
Une autre :
$x_7^* = \frac{1000}{p_7} = 16.67$ et $x_1^* = x_2^* = x_3^* = \cdots = x_6^* = 0$.

Sa «valeur» est la valeur de la fonction objectif, qui dans ce cas vaut 2575 dans les deux cas.

# Exercice numérique

Dans notes cas, il y a en fait une infinité de solutions car nous pouvons allouer une part du budget à l’action 2 et le reste à l’action 2, nous aurons toujours le même valeur de la fonction objectif (2575).

En fait, les solutions optimales sont la droite

$$\frac{x_2}{p_2} + \frac{x_7}{p_7} = 1000.$$

# Programmation linéaire

La *programmation linéaire* est un cas particulier des problèmes d'optimisation.

La fonction objectif ainsi que toutes les contraintes sont des *fonctions linéaires* en fonction des variables de décision.

# Modélisation sous forme de PL

Le premier challenge à surmonter est, étant donné un problème, de le ***modéliser***, à savoir l'exprimer sous la forme d'un problème d'optimisation.

Ceci consiste à convertir le problème à résoudre sous la forme

$$\begin{aligned} &\min \vec{c}^T \vec{x} \\ s.c.& \\ &A\vec{x} = \vec{b} \\ &\vec{x} \geq \vec{0} \end{aligned}$$

Donc à définir
- les variables de décision $\vec{x}$,
- la fonction objectif $\vec{c}^T\vec{x}$,
- Les contraintes $A\vec{x} \leq \vec{b}$.

# Exercice de modélisation

Modélisez le problème suivant sous forme de PL.

Un marchand de glace cherche à optimiser son revenu.

Il peut produire 2 parfums : vanille et chocolat.

Voici les recettes 1 litre de chaque parfum

| | Vanille | Chocolat | A disposition |
|---|---|---|---|
| Sucre | 1 Kg | 1.5 Kg | 800 Kg |
| Lait | 2 l | 6 l | 600 l |
| Cacao | 15 g | 100 g | 9 Kg |
| Vanille | 70 g | 17.5 g | 7 Kg |

Le revenu pour chaque litre de glace est de 8.- pour le chocolat et 9.- pour la vanille.

# Corrigé

Variables de décision :
$x_1$ = quantité (en litres) de vanille à produire
$x_2$ = quantité (en litres) de chocolat à produire

Fonction objectif : $9 \times x_1 + 8 \times x_2$

Contraintes : ne pas dépasser les quantités :

$$
\begin{array}{cccccccl}
1 & \times x_1 & + & 1.5 & \times x_2 & \leq & 800 & \text{(Kg de sucre)} \\
2 & \times x_1 & + & 6 & \times x_2 & \leq & 600 & \text{(l de lait)} \\
15 & \times x_1 & + & 100 & \times x_2 & \leq & 9000 & \text{(g de cacao)} \\
70 & \times x_1 & + & 17.5 & \times x_2 & \leq & 7000 & \text{(g de vanille)}
\end{array}
$$

# Ecriture standard

Un problème d'optimisation linéaire peut ***toujours*** s'écrire sous la forme suivante :

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i \times x_i$$

$$s.c.$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i} \times x_i = b_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{2i} \times x_i = b_2$$

$$\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{mi} \times x_i = b_m$$

# Forme standard – forme matricielle

Cette écriture peut se faire sous forme matricielle :

$$\min \vec{c}^T \vec{x}$$
$$s.c.$$
$$A\vec{x} = \vec{b}$$
$$\vec{x} \geq \vec{0}$$

Avec $\vec{c}$ et $\vec{x}$ des vecteurs colonne de taille $n \times 1$, $\vec{b}$ un vecteur colonne de taille $m \times 1$ et $A$ une matrice de taille $m \times n$.

Cette forme s'appelle aussi la *forme standard* d'un problème d'optimisation.

# Forme canonique – forme matricielle

Une autre forme (équivalente) s'écrit de manière suivante :

$$\min \vec{c}^T \vec{x}$$
$$s.c.$$
$$A\vec{x} \leq \vec{b}$$
$$\vec{x} \geq \vec{0}$$

Cette forme s'appelle la *forme canonique* d'un problème d'optimisation.

# Ces formes sont-elles universelles ?

Nous avons déjà vu que tout problème de maximisation peut s'écrire sous forme de problème de minimisation :

Maximiser $\vec{p}^T\vec{x}$ revient à minimiser $-\vec{p}^T\vec{x}$, cela revient donc à poser $\vec{c} = -\vec{p}$.

Qu'en est-il des contraintes ?

# Canonique vers standard

Si nous avons une contrainte du type

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \times x_i \leq b_k,$$

On ajoute une ***variable d'écart*** $y_j$ de manière suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \times x_i + y = b_k,$$

Le coût dans la fonction à minimiser de $y_j$ est de 0.
Il suffit alors de poser

$$x' = (x_1, \dots, x_n, y),$$

$$c' = (c_1, \dots, c_n, 0),$$

$$a'_{ji} = \begin{cases} a_{ji}, \forall i = 1, \dots, n \\ 1, i = n+1, j = k \\ 0, i = n+1, j \neq k \end{cases}$$

Et nous retrouvons une contrainte sous la forme standard.

# Equivalence des contraintes

Si nous avons une contrainte du type

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \times x_i \geq b_j,$$

il suffit de changer le signe des deux côtés pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{n} -a_{ji} \times x_i \leq -b_j.$$

# Standard vers canonique

Les contraintes du type

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \times x_i = b_j,$$

S'écrivent sous la forme de deux inégalités :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \times x_i \leq b_j$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} -a_{ji} \times x_i \leq -b_j.$$

Cela permet de passer d'une forme à l'autre.

# Remarque

Nous n'avons pas considéré ici d'inégalité stricte.

Nous pourrions toujours modéliser ce type de contrainte sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \times x_i < b_j$$

de manière suivante

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \times x_i \leq b_j - \epsilon.$$

# Exercice

Ecrivez le problème d'optimisation de portefeuille sous forme ***canonique*** puis sous forme ***standard***.

Donnez-en l'écriture matricielle.

# Optimisation en nombres entiers

Nous avons supposé que nous pouvions acheter un nombre quelconque d'actions de chaque action. En particulier, une fraction.

Que se passe-t-il si nous imposons devoir acheter un nombre ENTIER d'actions ?

Cela revient à transformer la contrainte

$$x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$$

en une nouvelle contrainte :

$$x_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, \dots, n.$$

# Optimisation en nombres entiers

Quelle en est la conséquence sur les solutions optimales ?

Etant donné que la solution
$x_2^* = \frac{1000}{p_2} = 25.00$ et $x_1^* = x_3^* = x_4^* = \cdots = x_7^* = 0$

satisfait la contrainte des nombres entiers, c'est aussi une solution optimale du second problème.

# Optimisation en nombres entiers

Notons que toute solution du second problème ($x_i \geq 0$) est également solution du premier.

Nous appelons le premier problème la ***relaxation*** du problème en nombre entier (car nous «relâchons» la contrainte des nombres entiers).

# Optimisation en nombres entiers

Toute solution du problème initial est solution du problème relaxé.

Par conséquent

$$\min_{s \in S_{relax}} f(s) \leq \min_{s \in S_{\mathbb{N}}} f(s).$$

Cela signifie que la solution optimale du problème relaxé est une ***borne inférieure*** du problème initial.

# Propriétés

Dans le cadre de la programmation linéaire, la fonction objectif ainsi que toutes les contraintes forment tous des plans de dimension $n + 1$, où $n$ est le nombre de variables de décision.

L'ensemble de toutes les solutions admissibles $\vec{x}$ telles que $A\vec{x}$= $\vec{b}$ est donc défini comme l'intersection de ces hyperplans.

L'ensemble des solutions admissibles est donc un polyèdre.

# Conditions d'existence d'une solution optimale

Un problème d'optimisation admet toujours une solution optimale, sauf si

1. L'ensemble des solutions admissibles est l'ensemble vide $S = \left\{\vec{x} \mid A\vec{x} \leq \vec{b}\right\} = \emptyset$,

2. Le problème est ***borné***, c'est-à-dire qu'il existe une valeur $M$ telle que $\vec{c}^T\vec{x} \leq M, \forall \vec{x} \in S$.

# Exemple non borné

Prenons l'exemple de l'optimisation de portefeuille.

S'il y avait une action dont le profit est $> 0$ et dont le coût d'achat serait $\leq 0$, alors le problème serait non borné.

En effet, on peut «acheter» une infinité d'actions sans entamer le budget. Or, l'action ayant un profit $> 0$, la solution optimale a un revenu $\infty$ : le problème n'est donc PAS borné !

# Note

L'exemple précédent est non borné car la solution optimale est infinie.

En revanche, supposons qu'il y ait une action à coût nul et à profit nul => on pourrait en acheter une infinité, mais cela n'influence pas la fonction objectif.

Dans ce cas, le problème est tout de même borné.

La notion de «borné» ou non s'applique donc à la valeur de la fonction objectif, pas aux valeurs des variables de décisions :

**un PL peut être borné même si pas toutes les variables de décisions le sont !!!**

# Résoudre un PL

Dans l’exemple de l’optimisation de portefeuille, nous avons trouvé la solution en

1. Cherchant les actions les plus profitable (profit / coût)
2. En investissant la totalité du budget dans ces actions.

Dans le cas général, ayant plusieurs contraintes, cela n’est pas aussi simple.

Comment faire alors ?

# Résolution graphique

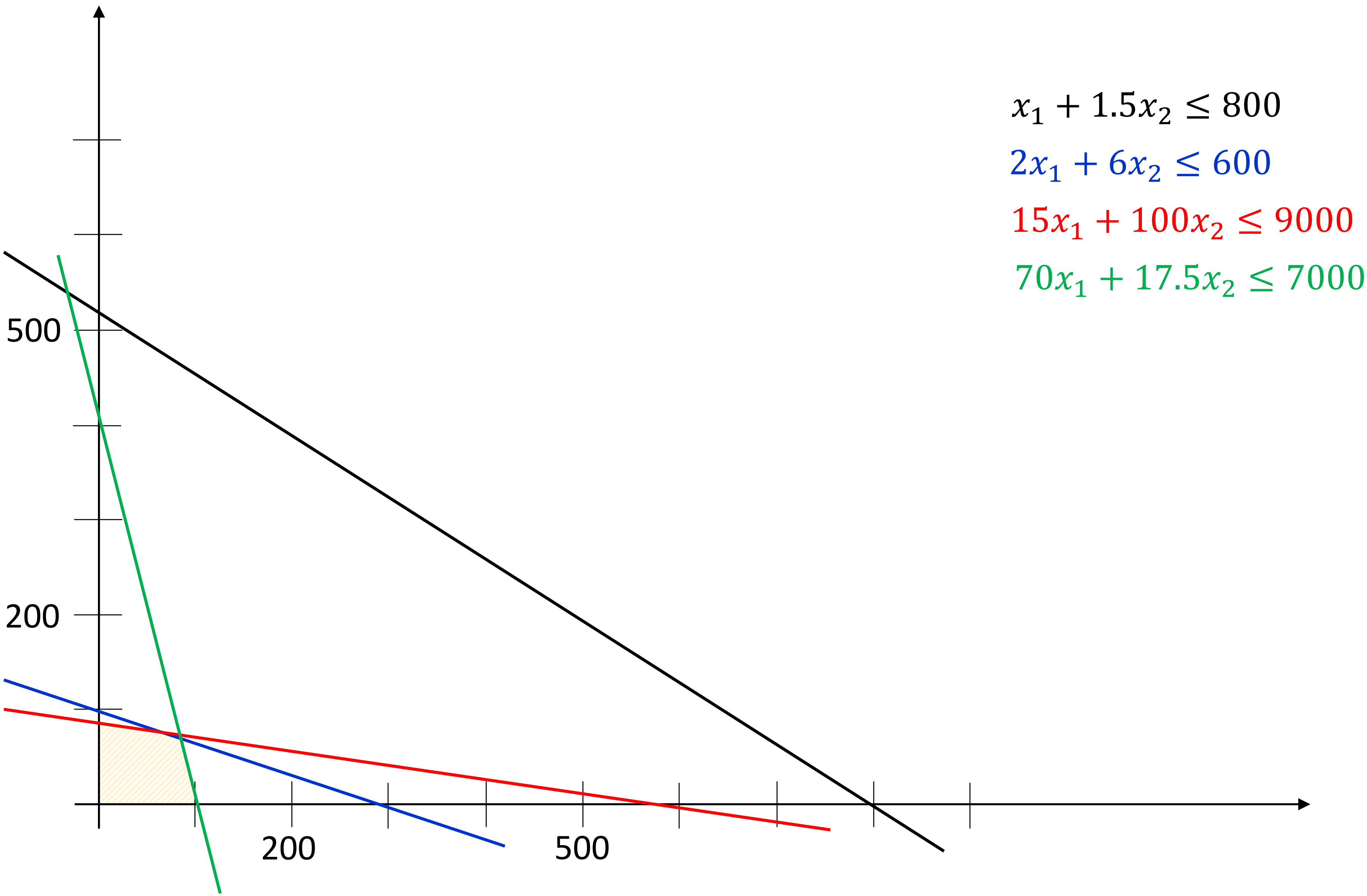
Dans le cas de problèmes de petites dimensions, nous pouvons alors dessiner le polyèdre des solutions admissibles.

Reprenons l'exemple du fabricant de glaces :

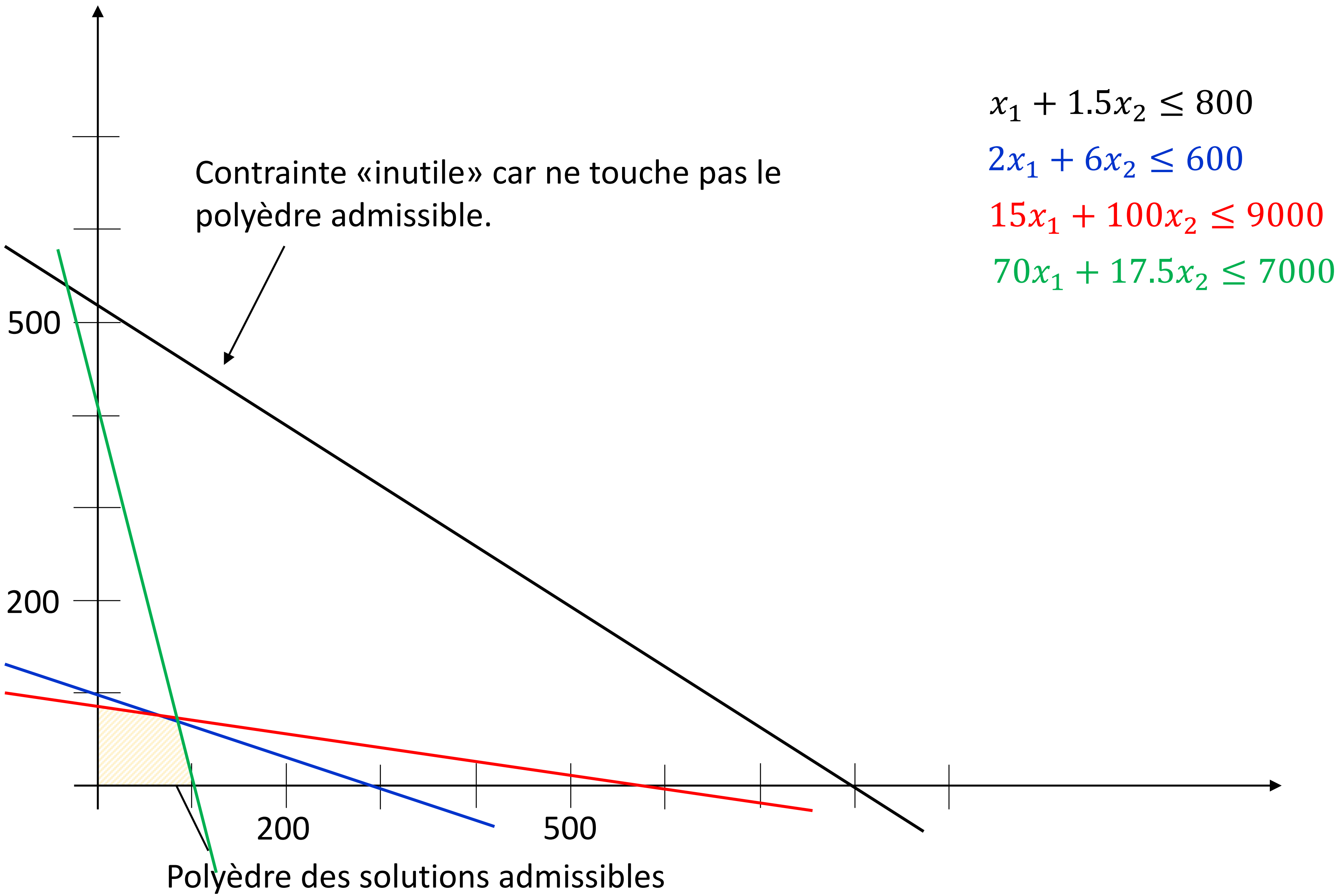
$$\max 9 \times x_1 + 8 \times x_2$$

s.c.

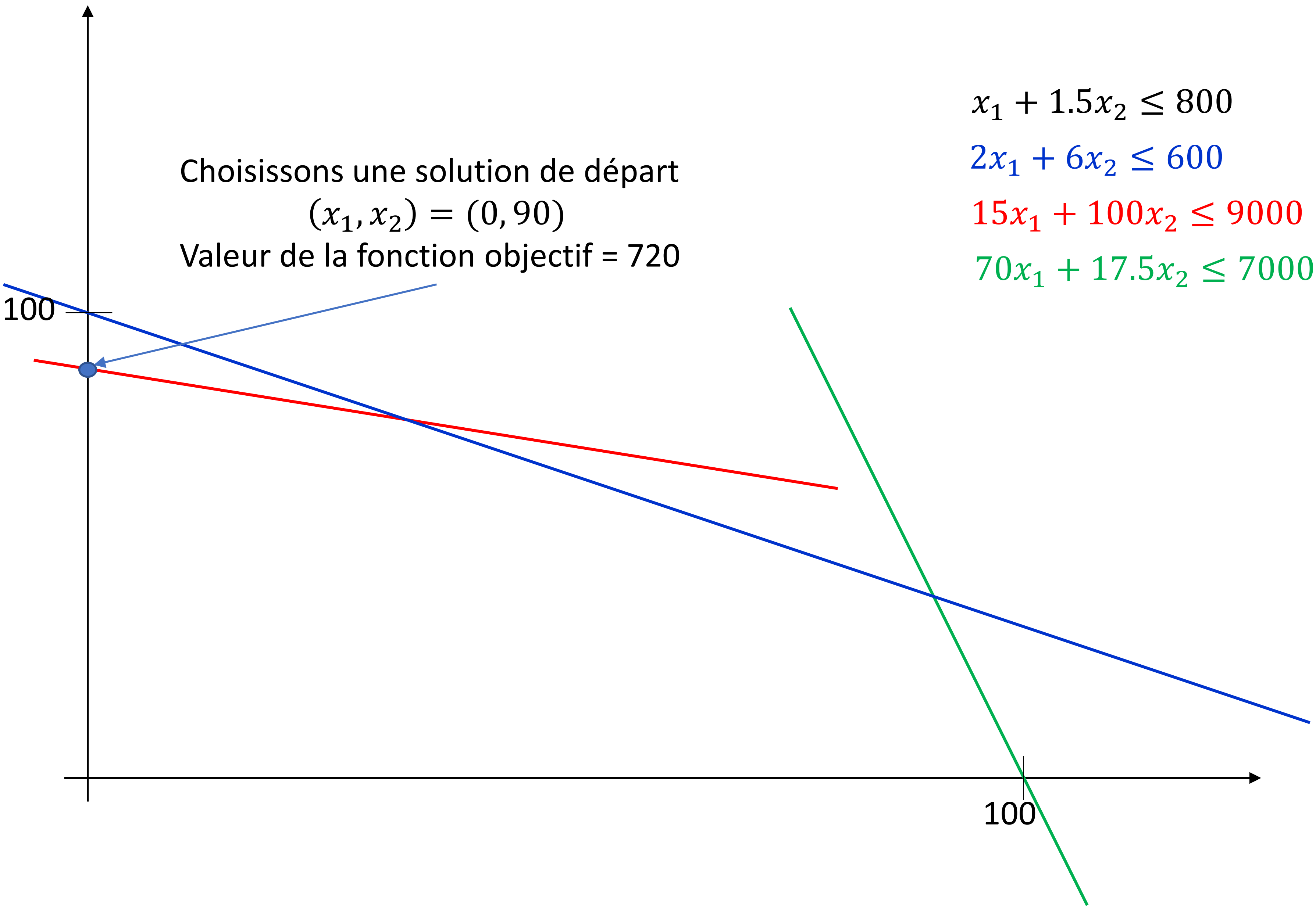
$$\begin{array}{cccccc}
1 & \times x_1 & + & 1.5 & \times x_2 & \leq & 800 \\
2 & \times x_1 & + & 6 & \times x_2 & \leq & 600 \\
15 & \times x_1 & + & 100 & \times x_2 & \leq & 9000 \\
70 & \times x_1 & + & 17.5 & \times x_2 & \leq & 7000
\end{array}$$



$x_1 + 1.5x_2 \leq 800$
$2x_1 + 6x_2 \leq 600$
$15x_1 + 100x_2 \leq 9000$
$70x_1 + 17.5x_2 \leq 7000$
500
200
200
500

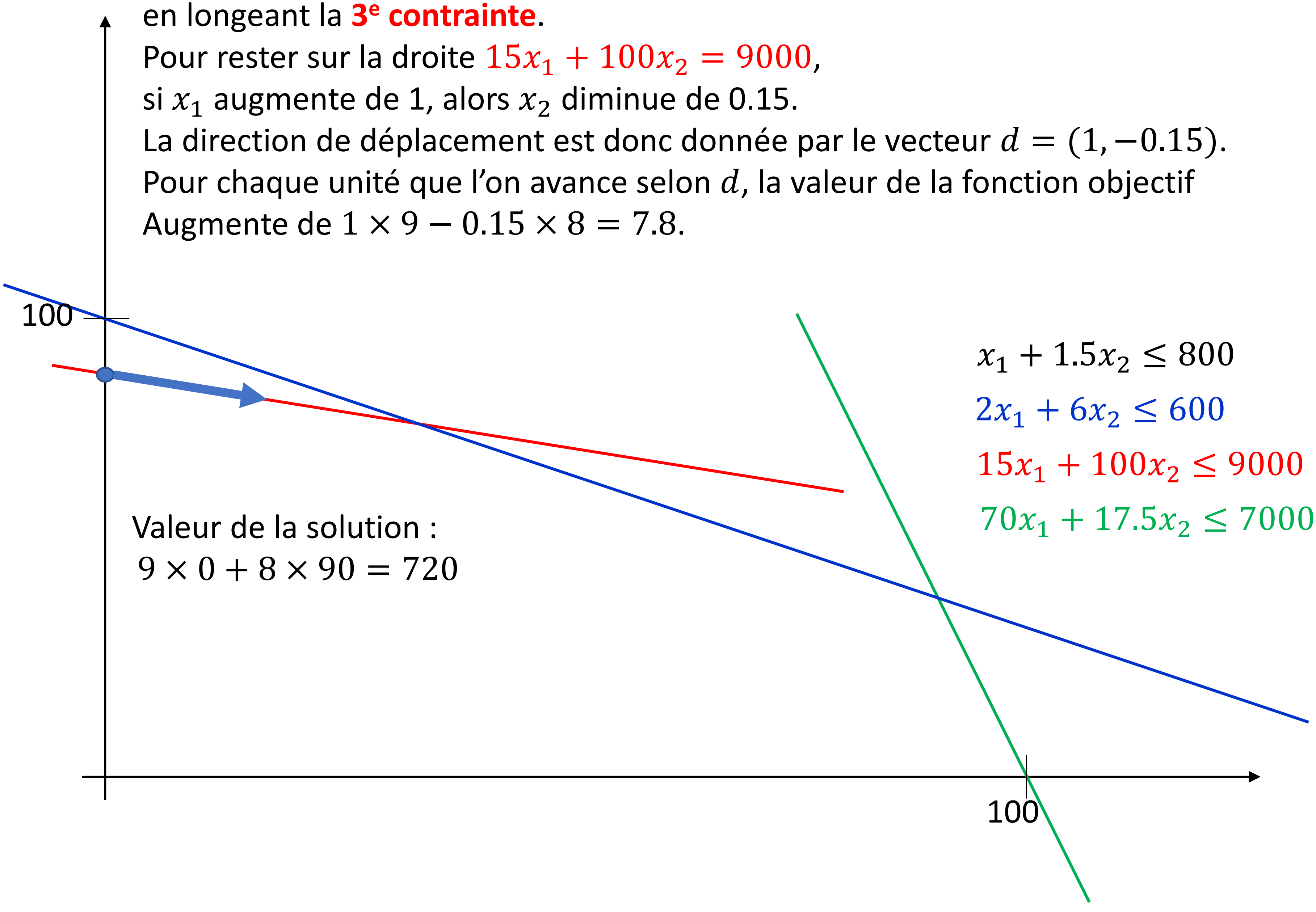


$x_1 + 1.5x_2 \leq 800$
$2x_1 + 6x_2 \leq 600$
$15x_1 + 100x_2 \leq 9000$
$70x_1 + 17.5x_2 \leq 7000$
Contrainte «inutile» car ne touche pas le polyèdre admissible.
500
200
200
500
Polyèdre des solutions admissibles



Choisissons une solution de départ
$(x_1, x_2) = (0, 90)$
Valeur de la fonction objectif = 720
100
100
$x_1 + 1.5x_2 \leq 800$
$2x_1 + 6x_2 \leq 600$
$15x_1 + 100x_2 \leq 9000$
$70x_1 + 17.5x_2 \leq 7000$

Explorons le bord du polyèdre admissible
en longeant la **3e contrainte**.
Pour rester sur la droite $15x_1 + 100x_2 = 9000$,
si $x_1$ augmente de 1, alors $x_2$ diminue de 0.15.
La direction de déplacement est donc donnée par le vecteur $d = (1, -0.15)$.
Pour chaque unité que l'on avance selon $d$, la valeur de la fonction objectif
Augmente de $1 \times 9 - 0.15 \times 8 = 7.8$.




$x_1 + 1.5x_2 \leq 800$

$2x_1 + 6x_2 \leq 600$

$15x_1 + 100x_2 \leq 9000$

$70x_1 + 17.5x_2 \leq 7000$

Valeur de la solution :
$9 \times 0 + 8 \times 90 = 720$

# Calcul du pas

Nous avons trouvé un point de départ et une direction nous permettant d'augmenter le profit. De combien pouvons-nous avancer dans cette direction ?

D'après le graphique, nous voyons que c'est jusqu'à l'intersection avec la 2ème contrainte $2x_1 + 6x_2 \leq 600$.

Ils nous faut donc trouver le plus grand pas $\delta$ tel que

$$(2,6) \times \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 90 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ -0.15 \end{pmatrix} \right] = 600$$

# Calcul du pas

$\delta$ est donc la solution de l'équation suivante

$$2\delta + 540 \; - 0.9\delta = 600$$

Autrement dit,

$$1.1\delta = 60$$

ou

$$\delta = \frac{60}{1.1} = \frac{600}{11} = 54.5454 \ldots$$

Donc les deux droites s'intersectent au point

$$\binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{90} + \frac{600}{11}\binom{1}{-0.15} = \frac{1}{11}\binom{600}{900} = \binom{54.55}{81.82}$$

# Déplacement - recalculs

Nous vérifions aisément que les deux contraintes sont à leur maximum pour

$2x_1 + 6x_2 \leq 600$ $\qquad$ $2 \times \frac{600}{11} + 6 \times \frac{900}{11} = 600$

$15x_1 + 100x_2 \leq 9000$ $\qquad$ $15 \times \frac{600}{11} + 100 \times \frac{900}{11} = 9000$

De plus, nous avons vu que si nous avançons de 1 dans la direction $d$, nous augmentons la valeur de la fonction objectif de augmente de $7.8$, ce qui se vérifie comme suit :

# Nouvelle valeur de la fonction objectif

Objectif initial : $\begin{pmatrix} 9 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 90 \end{pmatrix} = 720$

Si nous nous déplaçons d'un pas de $\delta$ le long de $d = (1, -0.15)$, la fonction objectif change de

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -0.15 \end{pmatrix} = 9 - 1.2 = 7.8$$

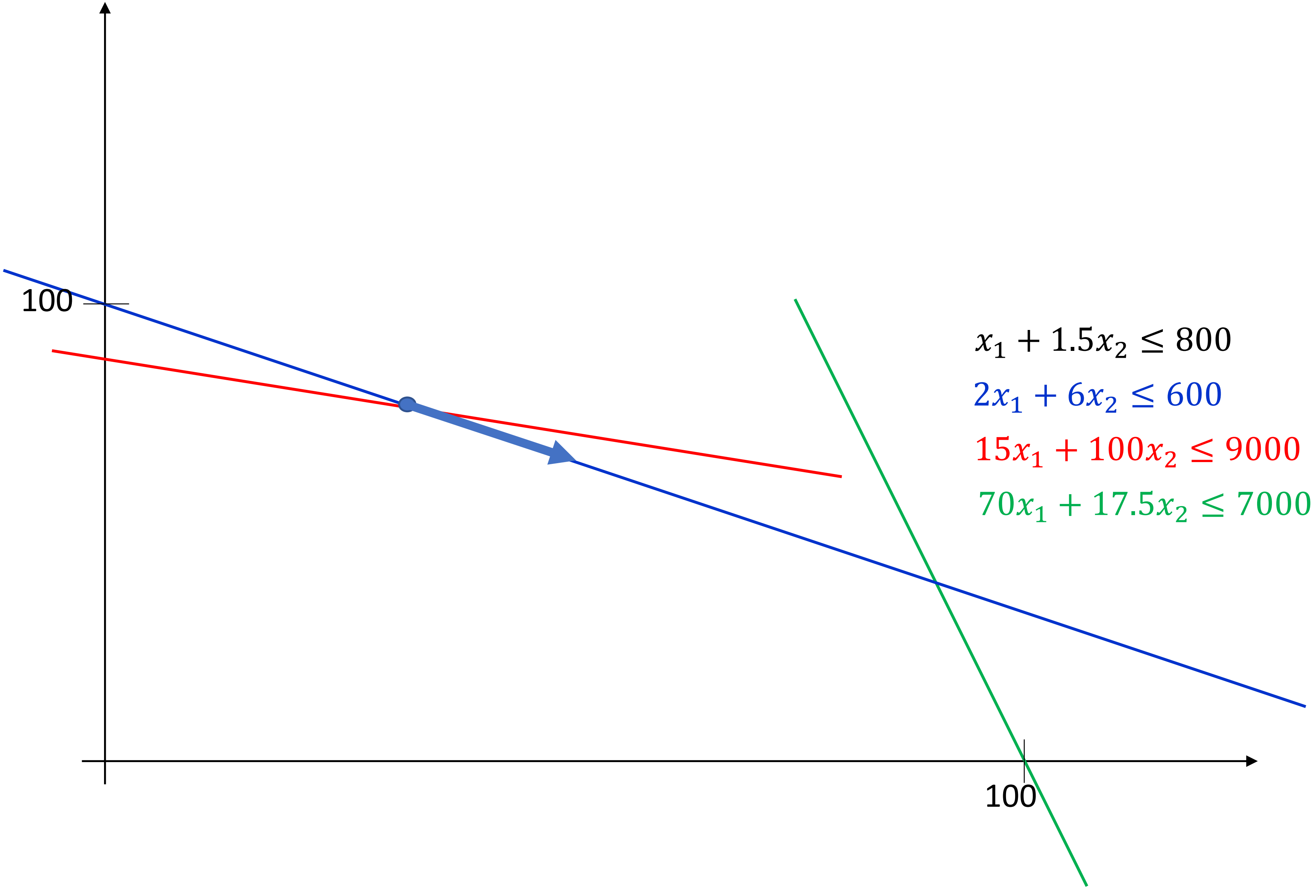
Après déplacement d'un pas $\delta = \frac{60}{11}$, la valeur de la fonction objectif est

$$720 + 7.8 \times \frac{600}{11} = \frac{12600}{11} = 1145.45 \ldots$$

Vérifions que c'est bien la bonne valeur (en utilisant $\vec{c}^T \vec{x}$ ) :

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 \end{pmatrix} \times \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 600 \\ 900 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} (5400 + 7200) = \frac{12600}{11}$$

Continuons cette fois le long de la 2$^e$ contrainte :



# Second déplacement

La contrainte $2x_1 + 6x_2 \leq 600$ est a direction

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Un déplacement d'un pas de $\delta$ en direction $\vec{d}$ augmente la fonction objectif de

$$\delta \times \vec{c}^T \vec{d} = \delta \times \left(9 - \frac{8}{3}\right) = \frac{19\delta}{3}.$$

# Second déplacement – pas maximum

Le pas maximum que nous pouvons faire est jusqu'à croiser la contrainte $70x_1 + 17.5x_2 \leq 7000$, donc

$$(70 \quad 17.5) \times \left[\frac{1}{11}\begin{pmatrix}600\\900\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\-1/3\end{pmatrix}\right] = 7000$$

Cela donne

$$70\delta - \frac{17.5}{3}\delta = 1750$$

Ou encore (en simplifiant)

$$\delta = \frac{300}{11} = 27.2727 \ldots$$

# Calcul du prochain point

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 600 \\ 900 \end{pmatrix} + \frac{300}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 900 \\ 800 \end{pmatrix}$$

La valeur de la fonction objectif est augmentée de $\frac{19\delta}{3}$, ce qui donne la nouvelle valeur de la fonction objectif

$$\frac{12600}{11} + \frac{300}{11} \times \frac{19}{3} = \frac{14500}{11} = 1318.18 \ldots$$

# Exercices

1. Vérifiez que le point suivant est sur les deux droites définies par les contraintes 2 et 4, et que la valeur de la fonction objectif est bien de 14500/11
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 900 \\ 800 \end{pmatrix}$$

2. Faites le calcul de la direction, du pas et du point suivant, ayant atteint le point ci-dessus.

# Propriétés de la Programmation Linéaire

Soit le problème de minimisation suivant avec $n$ variables et $m$ contraintes :

$$\min \vec{c}^T \vec{x}$$
$$s.c.$$
$$A\vec{x} \le \vec{b}$$
$$\vec{x} \ge \vec{0}$$

- Chaque contraint $A_j\vec{x} \le b_j$ définit un hyperplan (de dimension $n$, s'il y a $n$ variables);
- L'ensemble des solutions définies par les contraintes $A\vec{x} \le \vec{b}$ est l'intersection de $m$ hyperplans dans l'espace des solutions de dimension $n$, soit un polyèdre convexe;
- Si le problème admet (au moins) une solution admissible, alors il existe un sommet du polyèdre convexe de valeur optimale.

Autrement dit : si la(une) solution optimale existe, nous la trouverons sur un sommet du polyèdre admissible !

Ce résultat est en fait le ***théorème fondamental*** de l'optimisation linéaire.

# Algorithme du simplexe – le principe

Pour résoudre un PL, l'une des méthodes les plus utilisées est l'algorithme du simplexe.

Son principe de base est le suivant :

1. Trouver un premier sommet admissible,

2. Trouver une direction, donc une arête du polyèdre adjacente au sommet permettant d'améliorer la fonction objectif

3. Avancer sur cette arête jusqu'à trouver un nouveau sommet.

# Identification des sommets

Commençons par le problème d'optimisation sous forme canonique suivant :

$$\min \vec{c}^T\vec{x}$$

$$s.c.$$

$$A\vec{x} \leq \vec{b}$$

$$\vec{x} \geq \vec{0}$$

Nous savons que nous pouvons le transformer en un problème sous forme canonique en ajoutant $m$ variables d'écart :

$$\min [\vec{c}|\vec{0}]^T[\vec{x},\vec{z}]$$

$$s.c.$$

$$[A|I_m][\vec{x}|\vec{z}] = \vec{b}$$

$$\vec{x},\vec{z} \geq \vec{0}$$

Où $I_m$ est la matrice identité de taille $m \times m$.

# Identification des sommets

Or, ici, nous avons $m$ équations pour $m + n$ inconnues.

Le système d'équations

$$[A|I_m][\vec{x}|\vec{z}] = \vec{b}$$

est donc surdimensionné (plus de variables que d'équations) – il a (en principe) une infinité de solutions.

Pour trouver un sommet, nous choisissons $m$ variables et fixons toutes les autres à 0. Cela revient à choisir $m$ colonnes dans la matrice $[A|I_m]$ (celles des variables non nulles) et à résoudre un système de $m$ équations à $m$ variables.

Notons $B$ la matrice $m \times m$ obtenue par les $m$ variables non nulles (donc colonnes) choisies.

# Exemple – le problème du glacier

Reprenons l'exemple du fabricant de glaces transformé sous forme standard (nous éliminons la 1ère contrainte obsolète)

$$\max 9 \times x_1 + 8 \times x_2 + 0z_1 + 0z_2 + 0z_3$$

s.c.

$$\begin{array}{rcr} 2x_1 + 6x_2 + z_1 & = & 600 \\ 15x_1 + 100x_2 + z_2 & = & 9000 \\ 70x_1 + 17.5x_2 + z_3 & = & 7000 \end{array}$$

Donc nous avons

$$[\vec{x}, \vec{z}] = (x_1, x_2, z_1, z_2, z_3),$$

$$\left[\vec{c}\middle|\vec{0}\right] = (9, 8, 0, 0, 0),$$

$$[A|I_m] = \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 100 & 0 & 1 & 0 \\ 70 & 17.5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

# Exemple – le problème du glacier

Nous avons 3 contraintes et 3 variables – fixons, par exemple, les variables $x_1 = 0$ et $z_1 = 0$. Nous obtenons la matrice $B$ avec les colonnes correspondant aux variables non-nulles $x_2, z_2$ et $z_3$ donc les colonnes 2, 4 et 5

$$[\vec{x}, \vec{z}] = (x_1, \boldsymbol{x_2}, z_1, \boldsymbol{z_2}, \boldsymbol{z_3}),$$

$$[A|I_m] = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{6} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 15 & \mathbf{100} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 70 & \mathbf{17.5} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$ et donc on veut résoudre

$$B\vec{x}_B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 17.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 9000 \\ 7000 \end{pmatrix}.$$

<u>NOTE IMPORTANTE :</u> si $B$ est de rang plein, elle est inversible et on obtient la solution par

$$\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b}.$$

Ici, nous trouvons facilement que la solution est $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ -1000 \\ 5250 \end{pmatrix}$ (rappelez-vous que nous avions fixé $x_1 = z_1 = 0$).

Notez que ce point n'est pas admissible car l'une des variables est négative !

# Exercice

Calculez deux autres points sommets du polyèdre défini par les contraintes du problème du vendeur de glaces (vous pouvez supprimer la contrainte obsolète d’emblée).

# Rappels de la géométrie vectorielle

Dans la géométrie vectorielle, nous savons que

- Un espace de dimension $k$ est engendré par une base génératrice contenant $k$ vecteurs linéairement indépendants.

Note : dans ce cas, il ne suffit pas que tous les vecteurs soient linéairement indépendants 2 à 2 – c'est l'ensemble qui doit l'être.

Contre-exemple : les vecteurs $(1{,}0)$, $(0{,}1)$ et $(1{,}2)$ sont tous linéairement indépendants 2 à 2. Par contre, nous pouvons écrire $1 \times (1{,}0) + 2 \times (0{,}1) = (1{,}2)$, donc l'ensemble des trois vecteurs n'est ***PAS*** linéairement indépendant, même s'ils les sont entre eux !

# Un sommet = une base

Selon le procédé précédent, nous voyons que trouver un sommet correspond à choisir une sous-matrice $B_{m\times m}$ en sélectionnant $m$ colonnes de la matrice $[A|I_m]$.

L'ensemble ainsi choisi sera appelé une ***base***. En effet, si les $m$ vecteurs colonne de $B$ sont linéairement indépendants, ils forment une base génératrice de

<u>Théorème :</u>
Soit le polyèdre défini par le système d'équations

$$[A|I_m][\vec{x}|\vec{z}] = \vec{b}$$
$$[\vec{x}|\vec{z}] \geq \vec{0}.$$

Alors une solution $\vec{x}_B \geq \vec{0}$ du système d'équations $B\vec{x}_B = \vec{b}$ est un sommet du polyèdre si et seulement si les colonnes de la matrice $B$ sont linéairement indépendantes.

<u>NOTE:</u>
selon les conditions du calcul matriciel, cela est équivalent de dire que $B$ est inversible ou $\det(B) \neq 0$ ! Ce qui est toujours le cas si les lignes de $A$ sont linéairement indépendante. On dit alors que $A$ est de rang plein ou $rang(A) = m$. De plus, si $B$ est inversible, la solution est unique.

# Note importante

Si nous avons un problème sous forme canonique

$$\min \vec{c}^T \vec{x}$$

$$s.c.$$

$$A\vec{x} \leq \vec{b}$$

$$\vec{x} \geq \vec{0}$$

Alors la matrice du problème transformé sous forme standard $[A|I_m]$ est toujours de rang plein.

# Note : la relation n’est pas 1-1

Si tout sommet correspond à une base et vice-versa, la relation n’est pas univoque.

Exemple : trouvez toutes les bases et leur sommet correspondant pour le système suivant :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

# Note : la relation n'est pas 1-1

Passons d'abord à la forme standard en utilisant des variables d'écart :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

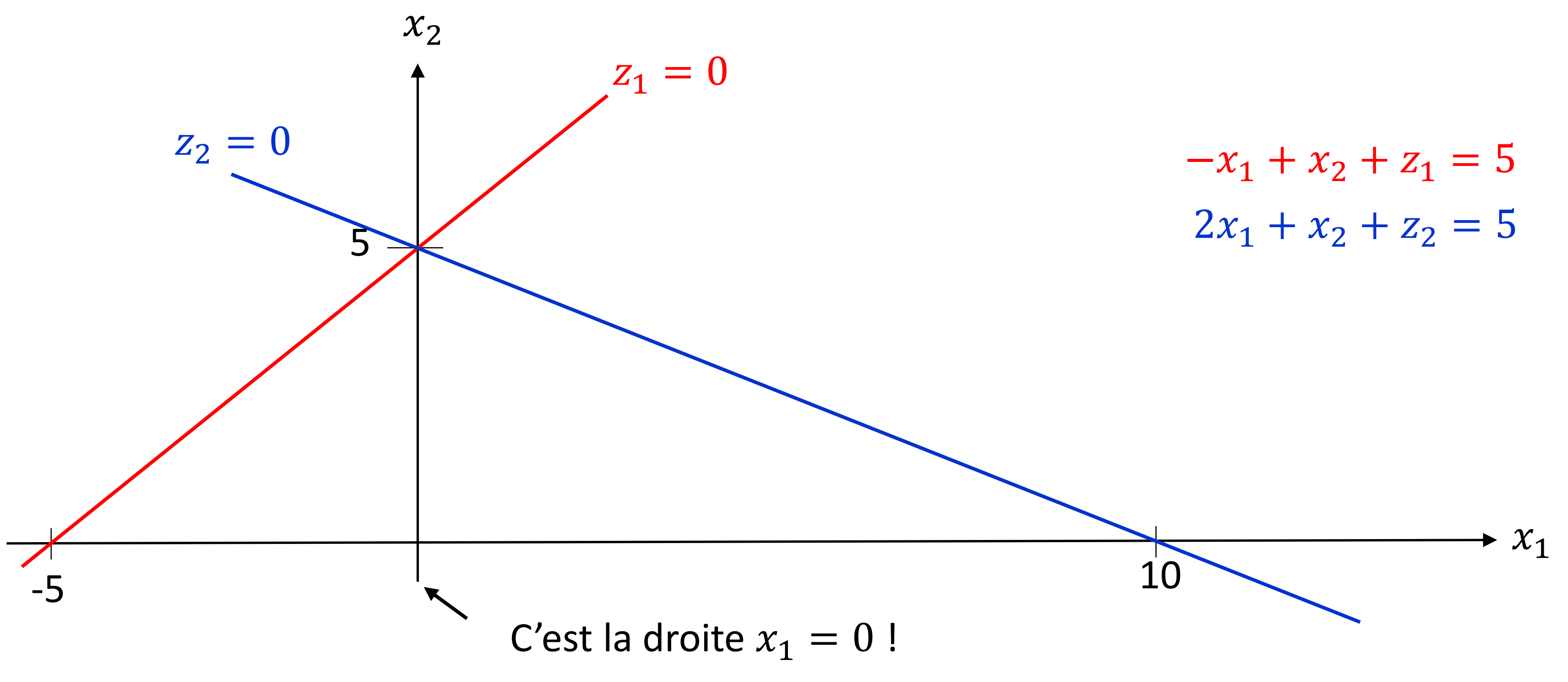
Le somme de la base ci-dessus est $x_1 = x_2 = 0$ et $z_1 = z_2 = 5$.

Pour les bases $\{x_2, z_1\}$ et $\{x_2, z_2\}$ nous avons que le sommet correspondant est le même : il s'agit de $x_2 = 5$ et $\mathrm{x}_1 = z_1 = z_2 = 5$.

# Note : la relation n'est pas 1-1

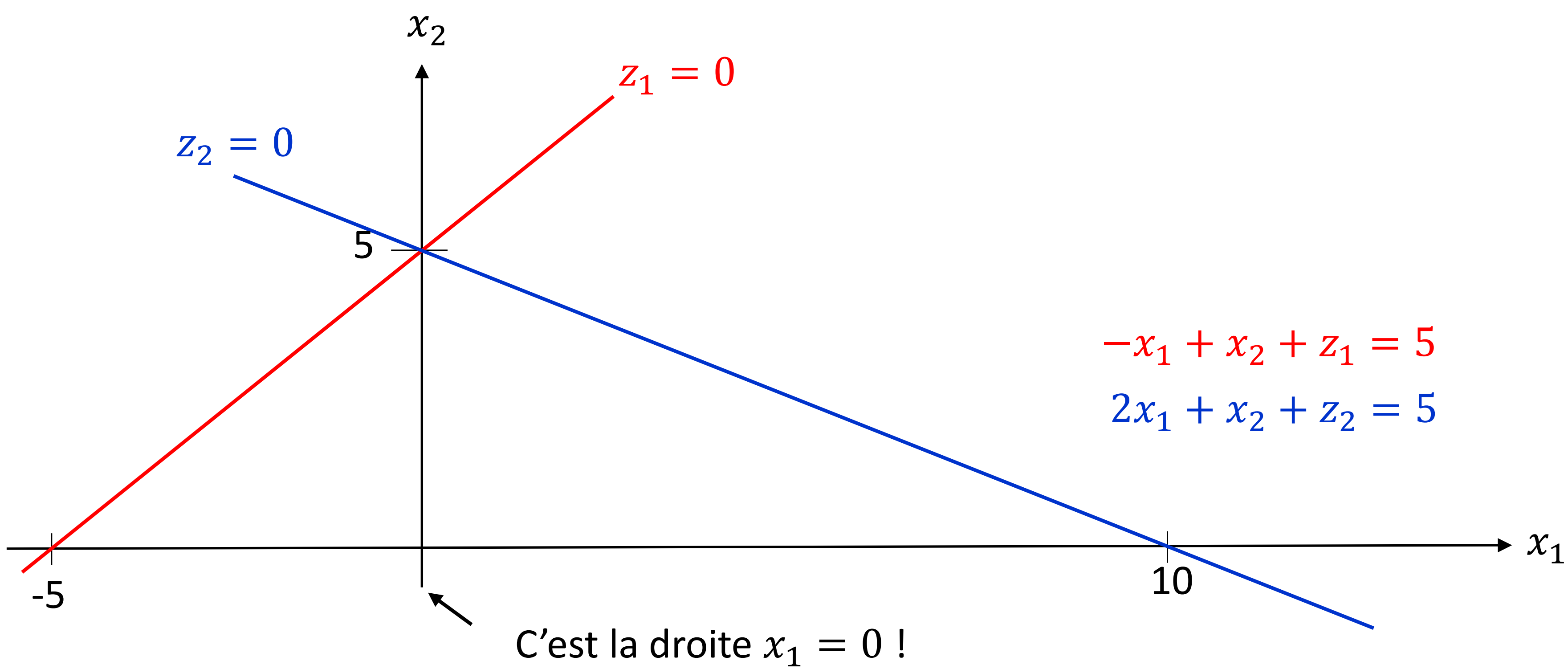
A quoi cela correspond-t-il ?

Graphiquement, il s'agit de l'intersection de 3 droites au même point : les droites $x_1 = 0$, $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$ se coupent toutes les trois au point $x_1 = 0, x_2 = 5$.



# Base dégénérée

Au point $x_2 = 5$, les 3 autres variables ont valeur 0. On peut donc définir la base $(x_2, z_1)$, $(x_2, z_2)$ ou encore $(x_1, x_2)$ – ces trois bases définissent le même point !
C’est ce que nous appelons une ***base dégénérée***.



# Méthode simple – l’énumération

La première méthode consiste à énumérer tous les sommets du polyèdre, donc toutes les solutions de base.

Cela correspond à toutes les choix possibles de $m$ colonnes parmi $n$ (rappelons que sous la forme standard $m \geq n$).

Cela correspond à $\frac{n!}{m! \times (n-m)!}$, qui est bien trop grand pour des grandes valeurs de $m$ et $n$ (ce n’est pas polynomial) !

# Méthode des sommets adjacents

L'idée de l'algorithme du simplexe est de parcourir des ***sommets adjacents***, donc deux bases qui ne diffèrent que d'une seule colonne (ou une seule variable non-nulle).

L'idée : remplace une colonne par une autre dans notre base.

Le principe : trouver une colonne «sortante» de la base actuelle et une colonne «entrante» qui n'y est pas encore, pour remplacer la colonne sortante.

Soient $j$ l'indice de la colonne sortante et $k$ celui de la colonne entrante. Alors la colonne $A_k$ ne contient que des 0 sauf à la $i_k$-ième ligne qui contient un 1 (cela s'écrit $A_k = \vec{e}_{i_k}$, le $i_k$-ème vecteur canonique).

Donc le changement de base en remplaçant $k$ par $j$ revient à pivoter autour de $A_{i_k j}$ ($i_k$-ème ligne et $j$-ème colonne).

# Exemple d'élimination de Gauss-Jordan

Trouver les sommet correspondant à la base $\vec{x}_B = (x_1, x_3, x_4)$ et $\vec{x}_B = (x_1, x_2, x_3)$ pour le système d'équations suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Exemple d'élimination de Gauss-Jordan

Notons que nous pouvons facilement sommet correspondant à la base $\vec{x}_B = (x_3, x_4, x_5)$ qui vaut $(0,0,5,2,8)$.

Nous souhaitons maintenant faire entrer en base $x_1$ et sortir $x_5$ de la base : $j = 1$ ($x_1$ entre en base) et $x_5$ sort donc $k = 5$, et comme il s'agit du 3e vecteur de la base canonique, $i_k = 3$. Le pivot est donc $a_{31}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Exemple d’élimination de Gauss-Jordan

Notons que nous pouvons facilement sommet correspondant à la base $\vec{x}_B = (x_3, x_4, x_5)$ qui vaut $(0{,}0{,}5{,}2{,}8)$.

Nous souhaitons maintenant faire entrer en base $x_1$ et sortir $x_5$ de la base : $j = 1$ ($x_1$ entre en base) et $x_5$ sort donc $k = 5$, et comme il s’agit du 3e vecteur de la base canonique, $i_k = 3$. Le pivot est donc $a_{31}$.
Créons la matrice augmentée (on ajoute le vecteur $\vec{b}$ comme colonne supplémentaire) :

Pivot

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \mathbf{2} & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Colonne entrante
Ou $x_1$ entre en base

Colonne sortante
($x_5$ = 0)
3e vecteur de la base canonique

# Exemple d'élimination de Gauss-Jordan

$l_3 \Rightarrow \frac{1}{2} l_3$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ \mathbf{1} & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$l_2 \Rightarrow l_2 - 2 \times l_3$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{1} & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

$1 \Rightarrow l_1 - l_3$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 19/4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{1} & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

Le sommet correspondant de la base $(x_1, x_3, x_4)$ et donc $(\frac{1}{4}, 0, 2, \frac{19}{4}, 0)$.
ATTENTION à bien lire le résultat ($x_1$ est le 3$^{e}$ vecteur de la base canonique !)

# Exemple d'élimination de Gauss-Jordan

Partons avec le sommet de la base $\vec{x}_B = (x_1, x_3, x_4)$ précédemment calculé.

Nous souhaitons maintenant faire entrer en base $x_2$ et sortir $x_4$ de la base : $j = 2$ ($x_2$ entre en base) et $x_4$ sort donc $k = 4$, et comme il s'agit du 2[e] vecteur de la base canonique, $i_k = 2$. Le pivot est donc $a_{22}$.
Créons la matrice augmentée (on ajoute le vecteur $\vec{b}$ comme colonne supplémentaire) :

Pivot

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 19/4 \\ 0 & \boxed{\mathbf{3}} & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

Colonne entrante
Ou $x_1$ entre en base

Colonne sortante
($x_4$ = 0)
2[e] vecteur de la base canonique

# Exemple d'élimination de Gauss-Jordan

$$l_3 \Rightarrow \frac{1}{3} l_3 \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 19/4 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$l_1 \Rightarrow l_1 + \frac{1}{2} l_2 \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1/6 & -2/3 & 61/12 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$l_3 \Rightarrow l_3 - \frac{1}{2} l_2 \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1/6 & -2/3 & 61/12 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 2/3 & 7/12 \end{array}\right)$$

Le sommet correspondant de la base $(x_1, x_2, x_4)$ et donc $(\frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{61}{12}, 0{,}0)$.

# Elimination de Gauss-Jordan - astuce

Si nous pivotons sur l'élément $A_{ij} \neq 0$ dans matrice $A$, alors la matrice résultante devient $A'$:

- $A'_{ij} = 1$ (le pivot devient 1),
- $A'_{kj} = 0, \forall k \neq j$ (tous les éléments de la colonne du pivot deviennent 0, sauf le pivot lui-même),
- $A'_{il} = \frac{A_{il}}{A_{ij}}, \forall l \neq i$ (diviser la ligne du pivot par le pivot),
- $A'_{kl} = A_{kl} - \frac{A_{il} \times A_{kj}}{A_{ij}}, \forall k \neq i, l \neq j$.

# Astuce illustrée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & \color{red}{\mathbf{2}} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' \Rightarrow \begin{pmatrix} ? & 0 & ? & ? & ? & ? \\ ? & 0 & ? & ? & ? & ? \\ 1/2 & \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Diviser la ligne du pivot par le pivot

1 pour le pivot et 0 partout ailleurs dans la colonne du pivot

# Astuce illustrée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A'_{21} = A_{21} - \frac{A_{22} \times A_{31}}{\boldsymbol{A_{32}}} = 2 - \frac{4 \times 1}{\mathbf{2}} = 0$$

$$A' \Rightarrow \begin{pmatrix} ? & 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \\ 1/2 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

# Astuce illustrée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & & & 1 & 0 & 2 \\ 1 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A'_{13} = A_{13} - \frac{A_{12} \times A_{33}}{\boldsymbol{A_{32}}} = 1 - \frac{0 \times 0}{\mathbf{2}} = 1}$$

$$A' \Rightarrow \begin{pmatrix} ? & 0 & 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \\ 1/2 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

# Astuce illustrée

Pour tous les coefficients restants

1. Former le carré des coefficients avec pour diagonale le coefficient et le pivot

2. Le résultat est donné par le coefficient moins le produit de la contre-diagonale divisée par le pivot

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1 - \frac{4 \times 0}{2} = 1$$

# Astuce illustrée

Pour tous les coefficients restants

1. Former le carré des coefficients avec pour diagonale le coefficient et le pivot

2. Le résultat est donné par le coefficient moins le produit de la contre-diagonale divisée par le pivot

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ & & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1} - \frac{0 \times 1}{\mathbf{2}} = 1$$

# Exercice – terminez le pivot

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & ? & 1 & ? & ? \\ 1/2 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

# Corrigé

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

# Exemple – le problème du glacier

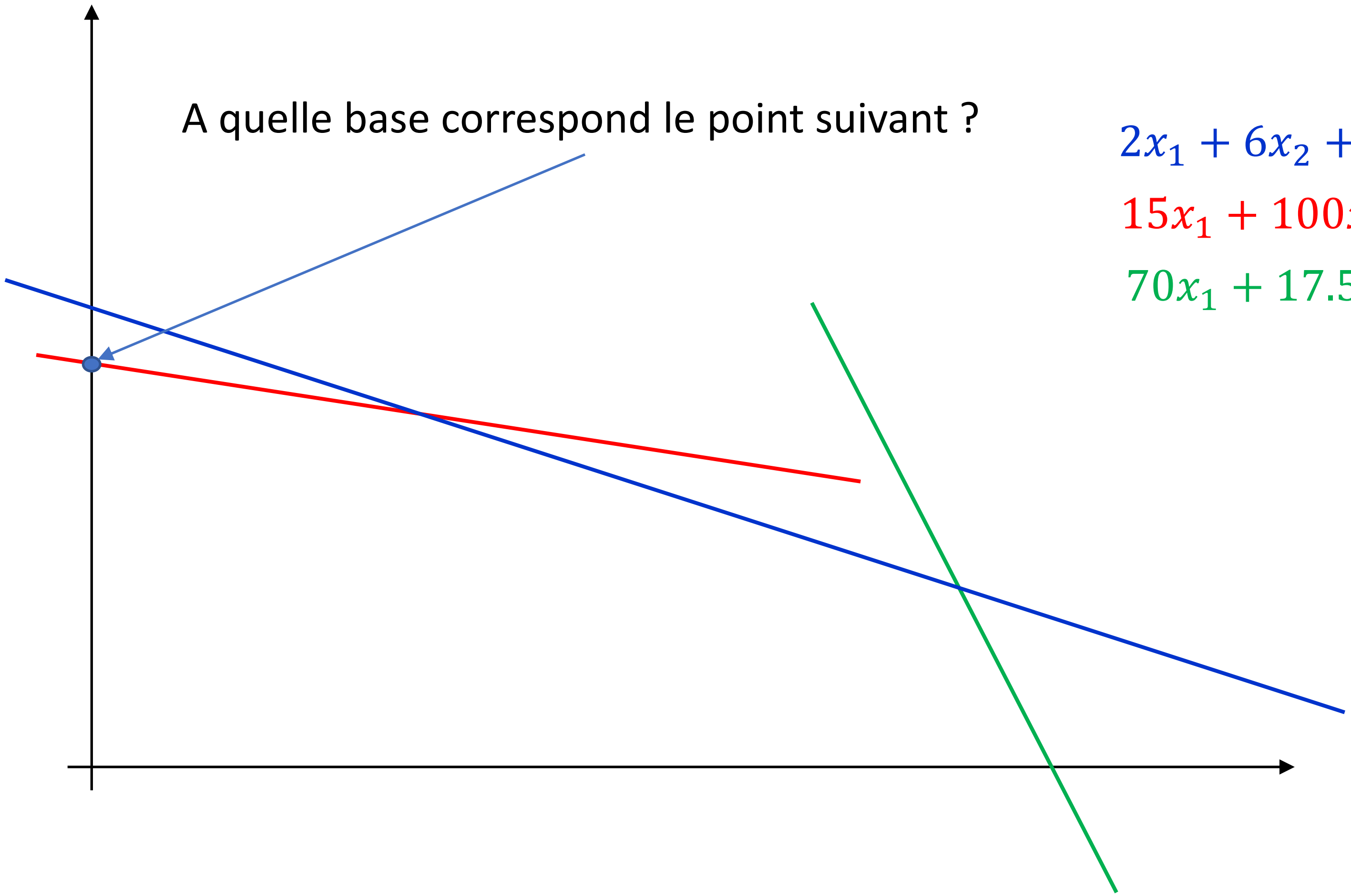
Reprenons l'exemple du fabricant de glaces transformé sous forme standard (nous éliminons la 1ère contrainte obsolète)

$$\max 9 \times x_1 + 8 \times x_2 + 0z_1 + 0z_2 + 0z_3$$

s.c.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + z_1 &= 600 \\ 15x_1 + 100x_2 + z_2 &= 9000 \\ 70x_1 + 17.5x_2 + z_3 &= 7000 \end{aligned}$$

# Exemple du vendeur de Glaces




$$2x_1 + 6x_2 + z_1 = 600$$

$$15x_1 + 100x_2 + z_2 = 9000$$

$$70x_1 + 17.5x_2 + z_3 = 7000$$

# Exemple – le problème du glacier

Utilisons la méthode du pivot (Gauss-Jordan) en partant de la base canonique $\vec{x}_B = (z_1, z_2, z_3)$ et le sommet correspondant $(0, 0, 600, 9000, 7000)$.
Pour obtenir le point de souhaité, $x_2$ entre en base et $z_2$ en sort, le pivot sera donc $A_{22}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 600 \\ 15 & \mathbf{100} & 0 & 1 & 0 & 9000 \\ 70 & 17.5 & 0 & 0 & 1 & 7000 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 \Rightarrow \frac{1}{100} l_2} \left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 600 \\ 0.15 & \mathbf{1} & 0 & 0.01 & 0 & 90 \\ 70 & 17.5 & 0 & 0 & 1 & 7000 \end{array}\right)$$

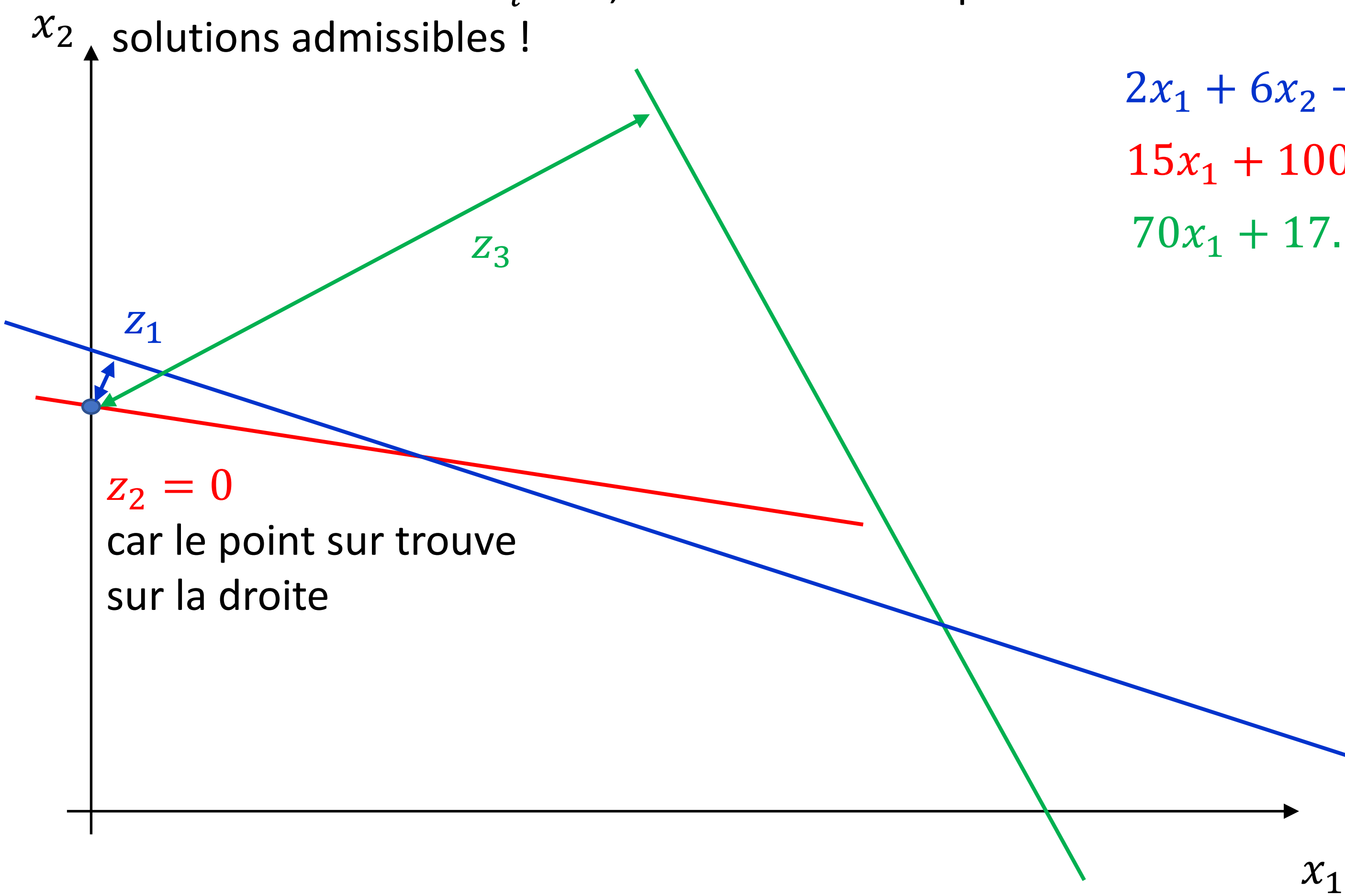
$$\xrightarrow{l_1 \Rightarrow l_1 - 6l_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1.1 & 0 & 1 & -0.06 & 0 & 60 \\ 0.15 & \mathbf{1} & 0 & 0.01 & 0 & 90 \\ 70 & 17.5 & 0 & 0 & 1 & 7000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{l_3 \Rightarrow l_3 - 17.5l_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1.1 & 0 & 1 & -0.06 & 0 & 60 \\ 0.15 & \mathbf{1} & 0 & 0.01 & 0 & 90 \\ 67.375 & 0 & 0 & -0.175 & 1 & 5425 \end{array}\right)$$

Le sommet correspondant à la base $\vec{x}_B = (x_2, z_1, z_2)$ est donc bien $(0, 90, 60, 0, 5425)$.

# Exemple du vendeur de Glaces

Graphiquement, en un point donné, la valeur des variables d'écart $z_1, z_2$ et $z_3$ correspond à la distance du point vers la contraints $1, 2$ respectivement 3.
La distance est mesurée par la perpendiculaire à la droite.
Si une des variables $z_i < 0$, nous ne sommes plus dans le domaine des solutions admissibles !



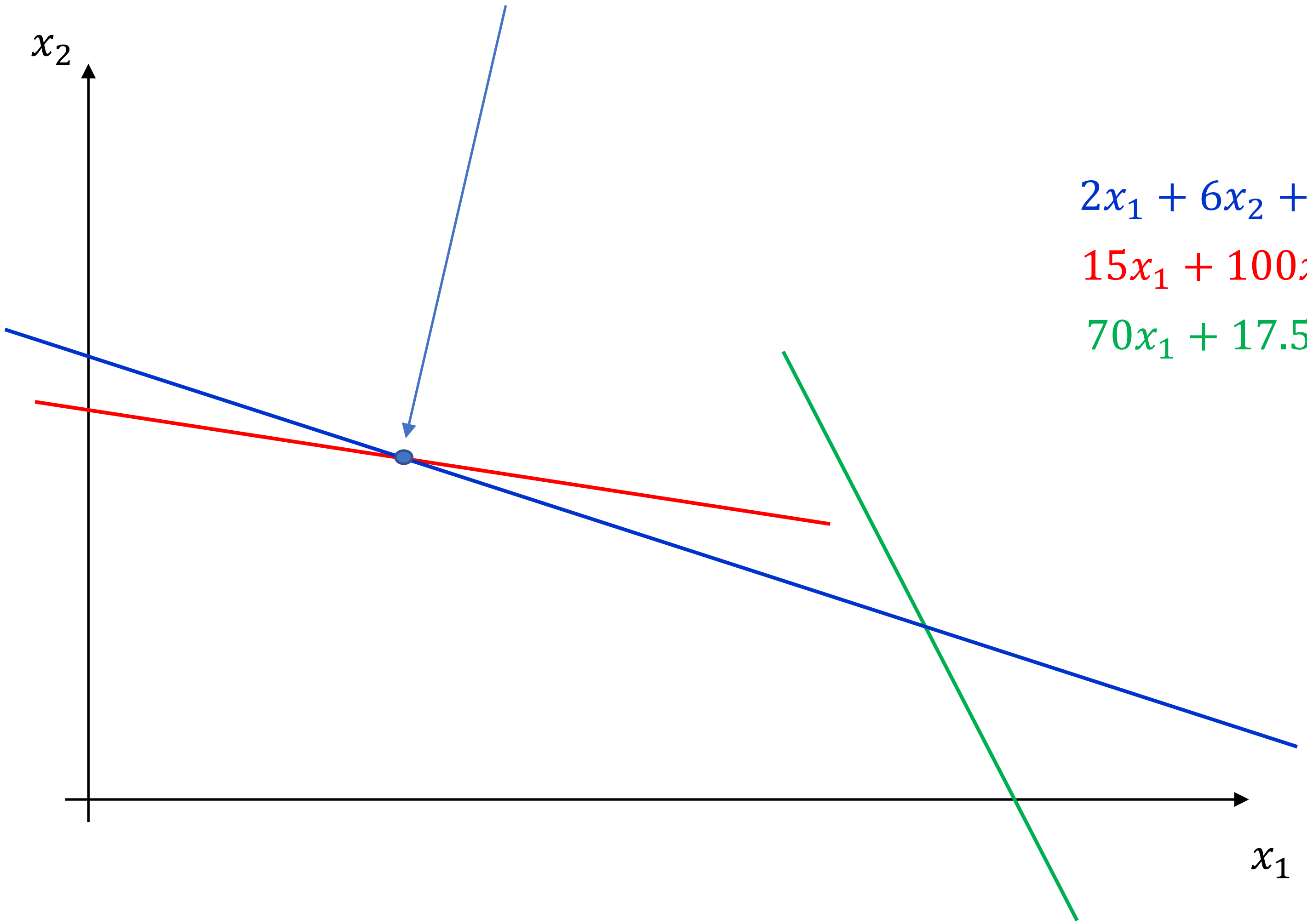

$$2x_1 + 6x_2 + z_1 = 600$$

$$15x_1 + 100x_2 + z_2 = 9000$$

$$70x_1 + 17.5x_2 + z_3 = 7000$$

# Exemple du vendeur de Glaces

Quelle sont les variables entrantes/sortantes pour le sommet adjacent suivant ?




$$2x_1 + 6x_2 + z_1 = 600$$

$$15x_1 + 100x_2 + z_2 = 9000$$

$$70x_1 + 17.5x_2 + z_3 = 7000$$

# Exemple – le problème du glacier

La nouvelle base sera $\vec{x}_B = (x_1, x_2, z_3)$ : le sommet étant à l'intersection des droites bleues et rouges, les variables d'écart correspondantes seront à $0 \Rightarrow z_1 = z_2 = 0$.
Pour obtenir le point de suivant, $x_1$ entre en base et $z_1$ en sort, le pivot sera donc $A_{11}$.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{1.1} & 0 & 1 & -0.06 & 0 & & 60 \\ 0.15 & 1 & 0 & 0.01 & 0 & & 90 \\ 67.375 & 0 & 0 & -0.175 & 1 & & 5425 \end{array}\right) \xrightarrow{l_1 \Rightarrow \frac{1}{1.1} l_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0.909 & -0.0545 & 0 & 54.55 \\ 0.15 & 1 & 0 & 0.01 & 0 & 90 \\ 67.375 & 0 & 0 & -0.175 & 1 & 5425 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{l_2 \Rightarrow l_2 - 0.15 l_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0.909 & 0.0545 & 0 & 54.55 \\ 0 & 1 & -0.136 & 0.018 & 0 & 81.82 \\ 67.375 & 0 & 0 & -0.175 & 1 & 5425 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{l_3 \Rightarrow l_3 - 67.375 l_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0.909 & 0.0545 & 0 & 54.55 \\ 0 & 1 & -0.136 & 0.0018 & 0 & 81.82 \\ 0 & 0 & -61.25 & 3.5 & 1 & 1750.00 \end{array}\right)$$

Le sommet correspondant à la base $\vec{x}_B = (x_1, x_2, z_3)$ est donc $(54.55, 81.82, 0, 0, 1750)$.

# Exemple – le problème du glacier

Pour que le sommet soit bien une solution admissible, il doit donc être solution du système d'équations initial :

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 100 & 0 & 1 & 0 \\ 70 & 17.5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 54.545 \\ 81.818 \\ 0 \\ 0 \\ 1750 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 9000 \\ 7000 \end{pmatrix}.$$

La vérification que c'est vrai est laissé en exercice !

# Exemple – le problème du glacier

Lors de la résolution graphique, nous avions trouvé le même point via le calcul d'une direction et d'un pas :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 90 \end{pmatrix} + \frac{60}{1.1}\begin{pmatrix} 1 \\ -0.15 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 600 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54.55 \\ 81.82 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \mathbf{1.1} & 0 & 1 & 0.06 & 0 & & 60 \\ 0.15 & 1 & 0 & 0.01 & 0 & & 90 \\ 37.375 & 0 & 0 & -0.175 & 1 & & 5425 \end{array}\right)$$

Matrice avant de pivoter

Notez que ci-dessus :

- tout est divisé par 1.1 (opération sur la première ligne) !
- La composante de la direction selon $x_2$ est $-0.15$, ce qui équivaut à $-A_{21}$ dans la matrice augmentée au départ
- La résolution graphique ne tenait pas compte de l'écart à la 3e contrainte

Donc, le pivot correspond à avancer dans la direction $(1, -0.15, -37.375)$ pour un pas de $\frac{60}{1.1}$.

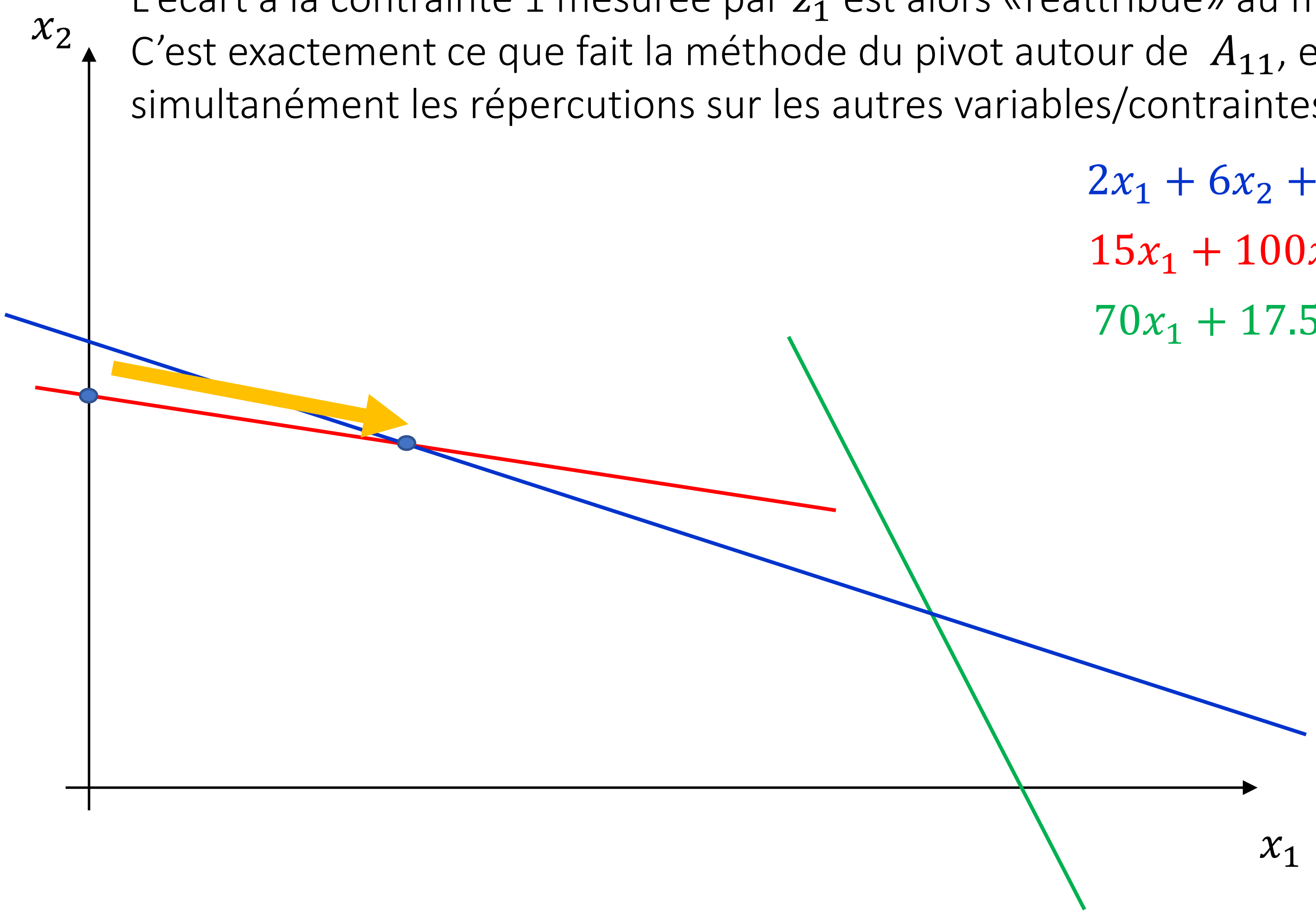
# Exemple du vendeur de Glaces

Le déplacement selon la direction choisie fait entrer $x_1$ en base et sortir $z_1$.
L'écart à la contrainte 1 mesurée par $z_1$ est alors «réattribué» au maximum à $x_1$.
C'est exactement ce que fait la méthode du pivot autour de $A_{11}$, en recalculant simultanément les répercutions sur les autres variables/contraintes!

$$2x_1 + 6x_2 + z_1 = 600$$

$$15x_1 + 100x_2 + z_2 = 9000$$

$$70x_1 + 17.5x_2 + z_3 = 7000$$



# Algorithme du Simplexe – forme tableau

Le principe de la méthode du simplexe sous forme tableau est de parcourir les sommets adjacents du polyèdres des solutions admissibles tout en évaluant, simultanément, la valeur de la fonction objectif.

Note importante : pour démarrer la méthode du simplexe, nous devons d'abord trouver un sommet du polyèdre admissible.

# Algorithme du Simplexe – initialisation

Pour démarrer la méthode du simplexe, il nous faut une solution admissible.

<u>Proposition :</u>

La solution $\vec{x} = \vec{0}$ est une solution admissible du problème d'optimisation

$$\begin{aligned} \min f &= \vec{c}^T \vec{x} \\ s.c.& \\ A\vec{x} &\leq \vec{b} \\ \vec{x} &\geq \vec{0} \end{aligned}$$

si $\vec{b} \geq \vec{0}$ (tous les membres de droite des contraintes sont positifs ou nuls).

# Algorithme du Simplexe
# 1. forme standard

Transformer le problème sous forme standard (ici, nous supposerons que $\vec{b} \geq \vec{0}$)

$$\min f = \overrightarrow{[c|0]}^T \overrightarrow{[x|z]}$$

$$s.c.$$

$$[A|I_m]\overrightarrow{[x|z]} = \vec{b}$$

$$\vec{x} \geq \vec{0}$$

Note : il y a $m$ contraintes et $n > m$ variables (dont les variables d'écart) donc chaque sommet correspond à une base ayant $m$ variables de base et toutes les autres sont fixées à $0$.

# Algorithme du Simplexe
# 2. Trouver un sommet admissible

Dans cette étape, il nous faut trouver une base admissible, soit $m$ variables non-nulles et toutes les autres qui seront à 0.

Comme nous avons supposé $\vec{b} \geq \vec{0}$, la solution $\vec{x} = \vec{0}$ est admissible.

La solution de base est donc
$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$
et les variables d'écart $z_1 = b_1, \ldots, z_m = b_m$.

# Algorithme du Simplexe
# 3. Former le tableau

| | $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{x_3}$ | … | $\boldsymbol{x_n}$ | $\vec{\boldsymbol{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{x_{\mathbf{B_1}}}$ | $A_{11}$ | $A_{12}$ | $A_{13}$ | … | $A_{1n}$ | $b_1$ |
| $\boldsymbol{x_{\mathbf{B_2}}}$ | $A_{21}$ | $A_{22}$ | $A_{23}$ | … | $A_{2n}$ | $b_2$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| $\boldsymbol{x_{\mathbf{B_m}}}$ | $A_{m1}$ | $A_{m2}$ | $A_{m3}$ | … | $A_{mn}$ | $b_m$ |
| $\boldsymbol{f}$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | … | $c_n$ | $0$ |

# Algorithme du Simplexe
# 4. Choix de la colonne entrant en base

Pour ce faire, il faut trouver une colonne $j$ telle que $c_j < 0$

| | $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{x_3}$ | … | $\boldsymbol{x_n}$ | $\vec{\boldsymbol{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{x_{B_1}}$ | $A_{11}$ | $A_{12}$ | $A_{13}$ | … | $A_{1n}$ | $b_1$ |
| $\boldsymbol{x_{B_2}}$ | $A_{21}$ | $A_{22}$ | $A_{23}$ | … | $A_{2n}$ | $b_2$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| $\boldsymbol{x_{B_m}}$ | $A_{m1}$ | $A_{m2}$ | $A_{m3}$ | … | $A_{mn}$ | $b_m$ |
| $\boldsymbol{f}$ | $c_1$ | $c_2 < 0$ | $c_3$ | … | $c_n$ | $0$ |

$x_2$ va entrer en base

Si tous les éléments de la dernière ligne sont $\geq 0$, alors
<u>STOP : la solution actuelle est optimale !</u>

# Algorithme du Simplexe
# 4. Choix de la colonne entrant en base

Note : il se peut qu'il y ait plusieurs candidats. Dans ce cas, ils faut appliquer un choix systématique et univoque (pour éviter de boucler).

Exemples :

- Règle de Bland : choisir la colonne avec le plus à gauche (avec le plus petit indice).

# Algorithme du Simplexe
# 5. Choix de variable sortante

Il faut alors calculer, pour chaque ligne où $A_{ij} > 0$, le rapport $b_i/A_{ij}$ et sélectionner la ligne dont le rapport est le PLUS PETIT

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_n$ | $\vec{b}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{B_1}$ | $A_{11}$ | $A_{12}$ | $A_{13}$ | … | $A_{1n}$ | $b_1$ | $b_1/A_{12}$ |
| $x_{B_2}$ | $A_{21}$ | $A_{22}$ | $A_{23}$ | … | $A_{2n}$ | $b_2$ | $b_2/A_{22}$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| $x_{B_m}$ | $A_{m1}$ | $A_{m2}$ | $A_{m3}$ | … | $A_{mn}$ | $b_m$ | $b_m/A_{m2}$ |
| $f$ | $c_1$ | $c_2 < 0$ | $c_3$ | … | $c_n$ | $0$ | |

$x_{B_2}$ sort de la base

$A_{22}$ est le PIVOT.

Si tous les coefficients de la colonne sortante sont $\leq 0$,

**STOP: la solution est non bornée (coût optimal = $-\infty$).**

# Algorithme du Simplexe
# 5. Choix de variable sortante

Notes :

- Il se peut que la plus petite valeur du rapport $b_i / A_{ij}$ soit atteinte pour plusieurs lignes. Dans ce cas, appliquer à nouveau une règle systématique (p.ex. règle de Bland : choisir la ligne avec le plus petit indice) !

# Algorithme du Simplexe
# 6. Méthode de  du pivot

Appliquez la méthode d’élimination de Gauss-Jordan avec le pivot choisi et retournez au point 4.

# ATTENTION aux éventuels cycles

Il se peut que l’algorithme fasse des cycles, alternant les bases admissibles sans jamais tomber sur la solution optimale.

La règle de Bland permet d’éviter les cycles (la preuve sort du cadre de ce cours) :

- Au point 3 (choix de la colonne entrante), toujours choisir la colonne avec le plus petit indice
- En cas d’égalité au point 4 (choix de la variable sortante), toujours choisir la ligne avec le plus petit indice (parmi toutes les lignes ayant le même rapport $A_{ij} > 0$).

# Illustration – Vendeur de glaces

1. Forme standard (ATTENTION, c'est important d'avoir le MIN ici)

$$\min f = -9 \times x_1 - 8 \times x_2 + 0z_1 + 0z_2 + 0z_3$$

s.c.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 6x_2 + z_1 & = & 600 \\ 15x_1 + 100x_2 + z_2 & = & 9000 \\ 70x_1 + 17.5x_2 + z_3 & = & 7000 \end{array}$$

# Illustration – Vendeur de glaces

2. Trouvons la solution initiale

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 600 \\ 9000 \\ 7000 \end{pmatrix}$$

# Illustration – Vendeur de glaces

3. Formons le tableau

| | $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{z_1}$ | $\boldsymbol{z_2}$ | $\boldsymbol{z_3}$ | $\vec{\boldsymbol{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{z_1}$ | $2$ | $6$ | $1$ | $0$ | $0$ | $600$ |
| $\boldsymbol{z_2}$ | $15$ | $100$ | $0$ | $1$ | $0$ | $9000$ |
| $\boldsymbol{z_3}$ | $70$ | $17.5$ | $0$ | $0$ | $1$ | $7000$ |
| $\boldsymbol{f}$ | $-9$ | $-8$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

# Illustration – Vendeur de glaces

4. Colonne entrante

| | $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{z_1}$ | $\boldsymbol{z_2}$ | $\boldsymbol{z_3}$ | $\vec{\boldsymbol{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{z_1}$ | $2$ | $6$ | $1$ | $0$ | $0$ | $600$ |
| $\boldsymbol{z_2}$ | $15$ | $100$ | $0$ | $1$ | $0$ | $9000$ |
| $\boldsymbol{z_3}$ | $70$ | $17.5$ | $0$ | $0$ | $1$ | $7000$ |
| $\boldsymbol{f}$ | $-9$ | $-8$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

$x_1$ va entrer en base

Note : nous avons appliqué la règle de Bland (les deux candidats étaient $x_1$ et $x_2$, nous choisissons celui de plus petit indice).

# Illustration – Vendeur de glaces

## 5. Variable sortante

| | $x_1$ | $x_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $\vec{b}$ | $b_i/A_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_1$ | 2 | 6 | 1 | 0 | 0 | 600 | 600/2 = 300 |
| $z_2$ | 15 | 100 | 0 | 1 | 0 | 9000 | 9000/15 = 600 |
| $z_3$ | 70 | 17.5 | 0 | 0 | 1 | 7000 | 7000/70 = 100 |
| $f$ | −9 | −8 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

$z_3$ va sortir de la base.

Pas de règle de Bland ici (c'est le seul candidat).

# Illustration – Vendeur de glaces

6. Elimination de Gauss-Jordan avec pivot $A_{31} = 70$

| | $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{z_1}$ | $\boldsymbol{z_2}$ | $\boldsymbol{z_3}$ | $\vec{\boldsymbol{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{z_1}$ | $0$ | $5.5$ | $1$ | $0$ | $-2/70$ | $400$ |
| $\boldsymbol{z_2}$ | $0$ | $96.25$ | $0$ | $1$ | $-15/70$ | $7500$ |
| $\boxed{\boldsymbol{x_1}}$ | $1$ | $0.25$ | $0$ | $0$ | $1/70$ | $100$ |
| $\boldsymbol{f}$ | $0$ | $-5.75$ | $0$ | $0$ | $9/70$ | $900$ |

$x_1$ est désormais en base !

Nous avons terminé l'étape 6 => retour à l'étape 4 !

# Illustration – Vendeur de glaces

Comment lire la solution courante ?

La valeur dans le membre de droite correspond à la valeur de la variable de base : $z_1 = 400$, $z_2 = 7500$ et $x_1 = 100$.
Les variables hors base $x_2 = z_3 = 0$.

| | $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{z_1}$ | $\boldsymbol{z_2}$ | $\boldsymbol{z_3}$ | $\vec{\boldsymbol{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{z_1}$ | $0$ | $5.5$ | $1$ | $0$ | $-2/70$ | $400$ |
| $\boldsymbol{z_2}$ | $0$ | $96.25$ | $0$ | $1$ | $-15/70$ | $7500$ |
| $\boldsymbol{x_1}$ | $1$ | $0.25$ | $0$ | $0$ | $1/70$ | $100$ |
| $\boldsymbol{f}$ | $0$ | $-5.75$ | $0$ | $0$ | $9/70$ | $900$ |

**Bonus :** la valeur de la fonction objectif est ***-900*** (la cellule en bas à droite contient donc $-f$ (attention à inverser le signe) !

# Illustration – Vendeur de glaces

## 4. Choix de la colonne entrante

| | $x_1$ | $x_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $\vec{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_1$ | $0$ | $5.5$ | $1$ | $0$ | $-2/70$ | $400$ |
| $z_2$ | $0$ | $96.25$ | $0$ | $1$ | $-15/70$ | $7500$ |
| $x_1$ | $1$ | $0.25$ | $0$ | $0$ | $1/70$ | $100$ |
| $f$ | $0$ | $-5.75$ | $0$ | $0$ | $9/70$ | $900$ |

$x_2$ va entrer en base

Pas de règle de Bland ici (c'est le seul candidat).

# Illustration – Vendeur de glaces

## 5. Choix de la colonne sortante

$z_1$ va sortir de la base.

| | $x_1$ | $x_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $\vec{b}$ | $b_i/A_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_1$ | $0$ | $5.5$ | $1$ | $0$ | $-2/70$ | $400$ | 400/5.5 = 72.72 |
| $z_2$ | $0$ | $96.25$ | $0$ | $1$ | $-15/70$ | $7500$ | 7500/96.25 = 77.9 |
| $x_1$ | $1$ | $0.25$ | $0$ | $0$ | $1/70$ | $100$ | 100/0.25 = 400 |
| $f$ | $0$ | $-5.75$ | $0$ | $0$ | $9/70$ | $900$ | |

Pas de règle de Bland ici (c'est le seul candidat).

# Illustration – Vendeur de glaces

6. Elimination de Gauss-Jordan avec pivot $A_{31} = 70$

$x_2$ est désormais en base !

| | $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{z_1}$ | $\boldsymbol{z_2}$ | $\boldsymbol{z_3}$ | $\vec{\boldsymbol{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{\boldsymbol{x_2}}$ | 0 | 1 | $2/11$ | 0 | $-2/385$ | 800/11 |
| $\boldsymbol{z_2}$ | 0 | 0 | -17.5 | 1 | 2/7 | 500 |
| $\boldsymbol{x_1}$ | 1 | 0 | -35/770 | 0 | 6/385 | 900/11 |
| $\boldsymbol{f}$ | 0 | 0 | 805/770 | 0 | 38/385 | 14500/11 |

Nous avons terminé l'étape 6 => retour à l'étape 4 !

# Illustration – Vendeur de glaces

## 4. Choix de la colonne entrante

| | $x_1$ | $x_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $\vec{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | $0$ | $1$ | $2/11$ | $0$ | $-2/385$ | $800/11$ |
| $z_2$ | $0$ | $0$ | -17.5 | $1$ | 2/7 | 500 |
| $x_1$ | $1$ | $0$ | -35/770 | $0$ | 6/385 | 900/11 |
| $f$ | $0$ | $0$ | 805/770 | $0$ | 38/385 | 14500/11 |

Il n'y a plus aucune colonne avec une valeur < 0 dans la dernière ligne

<u>**STOP : NOUS AVONS TROUVÉ LA SOLUTION OPTIMALE !**</u>

# Illustration – Vendeur de glaces

Lecture de la solution optimale :

| | $x_1$ | $x_2$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $\vec{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | $2/11$ | 0 | $-2/385$ | $800/11$ |
| $z_2$ | 0 | 0 | -17.5 | 1 | 2/7 | 500 |
| $x_1$ | 1 | 0 | -35/770 | 0 | 6/385 | 900/11 |
| $f$ | 0 | 0 | 805/770 | 0 | 38/385 | 14500/11 |

La solution optimale est $x_1 = 900/11$, $x_2 = 800/11$, $z_2 = 500$, $z_1 = z_3 = 0$.

La valeur de la solution optimale est $f = -14500/11$.

# Illustration – Vendeur de glaces

Vérifions :

$$f = -9 \times x_1 - 8 \times x_2 = -\frac{8100}{11} - \frac{6400}{11} = -\frac{14500}{11}.$$

Rappelons que nous avions un problème de MAXIMISATION à l'origine (maximiser le profit) donc ici, $f$ est – le profit.

Le bénéfice (maximum) est donc de $\frac{14500}{11} = 1318.18$.

# Illustration – Vendeur de glaces

Vérifions :

$$f = -9 \times x_1 - 8 \times x_2 = -\frac{8100}{11} - \frac{6400}{11} = -\frac{14500}{11}.$$

D'après le tableau, $z_1 = z_3 = 0$, nous avons donc que les contraintes $1$ et $3$ sont saturées.
En effet :

$$2 \times \frac{900}{11} + 6 \times \frac{800}{11} + 0 = \frac{6600}{11} = 600, \quad \text{(Lait)}$$

$$70 \times \frac{900}{11} + 17.5 \times \frac{800}{11} + 0 = \frac{77000}{11} = 7000. \quad \text{(Vanille)}$$

La 2e contrainte n'est pas saturée et il reste $z_2 = 500$ de cacao disponible avec notre plan de production :

$$15 \times \frac{900}{11} + 100 \times \frac{800}{11} = \frac{93500}{11} = 8500 = 9000 - 500 = 9000 - z_2 \quad \text{(Cacao)}$$

# Remarques

Pour la transformation sous forme STANDARD, avoir un problème de MAXIMISATION fonctionne aussi.

La seule différence se fait dans l'étape 4 : il faut changer les signes dans la logique :

Trouver une colonne $j$ telle que $c_j > 0$

Si tous les éléments de la dernière ligne sont $\leq 0$, alors
<u>**STOP : la solution actuelle est optimale !**</u>

**Pourquoi ?**

# Signification de la dernière ligne

Le coefficient de la dernière ligne correspond à ce qu'on appelle communément le ***coût réduit*** de la variable.

Cette valeur correspond au changement de la valeur de la fonction objectif si la variable augmente de 1.

Si cette valeur est négative, alors faire entrer la variable correspondante en base fera diminuer la fonction objectif.

A l'inverse, si la valeur est positive, la fonction objectif va augmenter.

Pour les solutions en base, le coût réduit est 0.

Ainsi, selon le sens de l'optimisation (max ou min), ce sont soit les coûts réduits positifs (max) ou négatifs (min) qui nous intéressent !

# Programmation en nombre entiers

Dans les exemples vus jusqu'ici, nous avons supposé

$$\vec{x} \in \mathbb{R}_+^n$$

Donc toute solution positive était admissible, sans autre contrainte.

Que se passe-t-il si nous souhaitons nous limiter aux solutions entières, donc

$$\vec{x} \in \mathbb{N}^n$$

# Programmation Linéaire en Nombres Entiers (PLNE)

Programme linéaire standard :

$$\min \vec{c}^T \vec{x}$$

$$s.c.$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\vec{x} \geq \vec{0}$$

Programme linéaire en nombre entiers :

$$\min \vec{c}^T \vec{x}$$

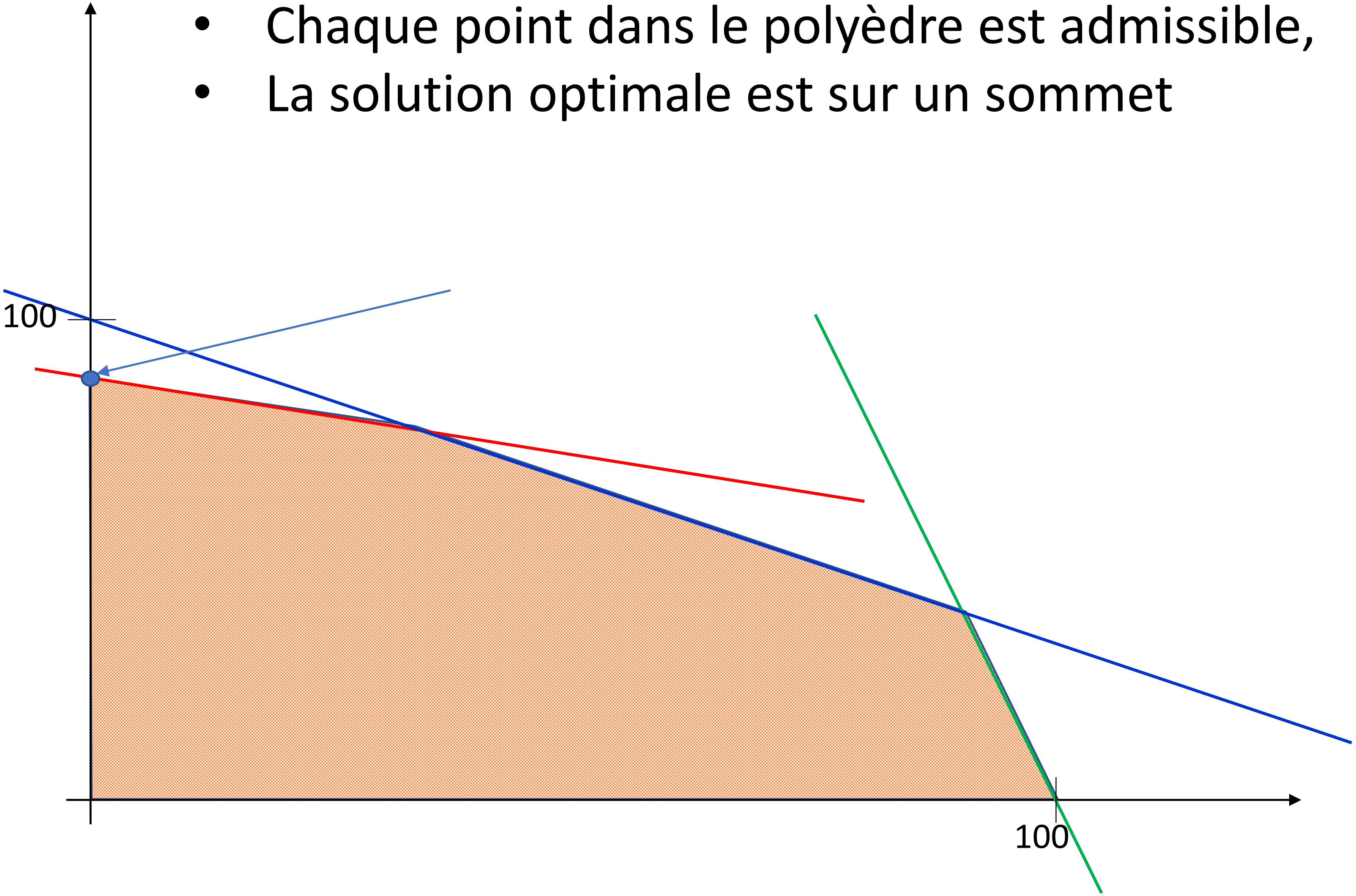
$$s.c.$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\boldsymbol{\vec{x}} \in \mathbb{N}^{\boldsymbol{n}}$$

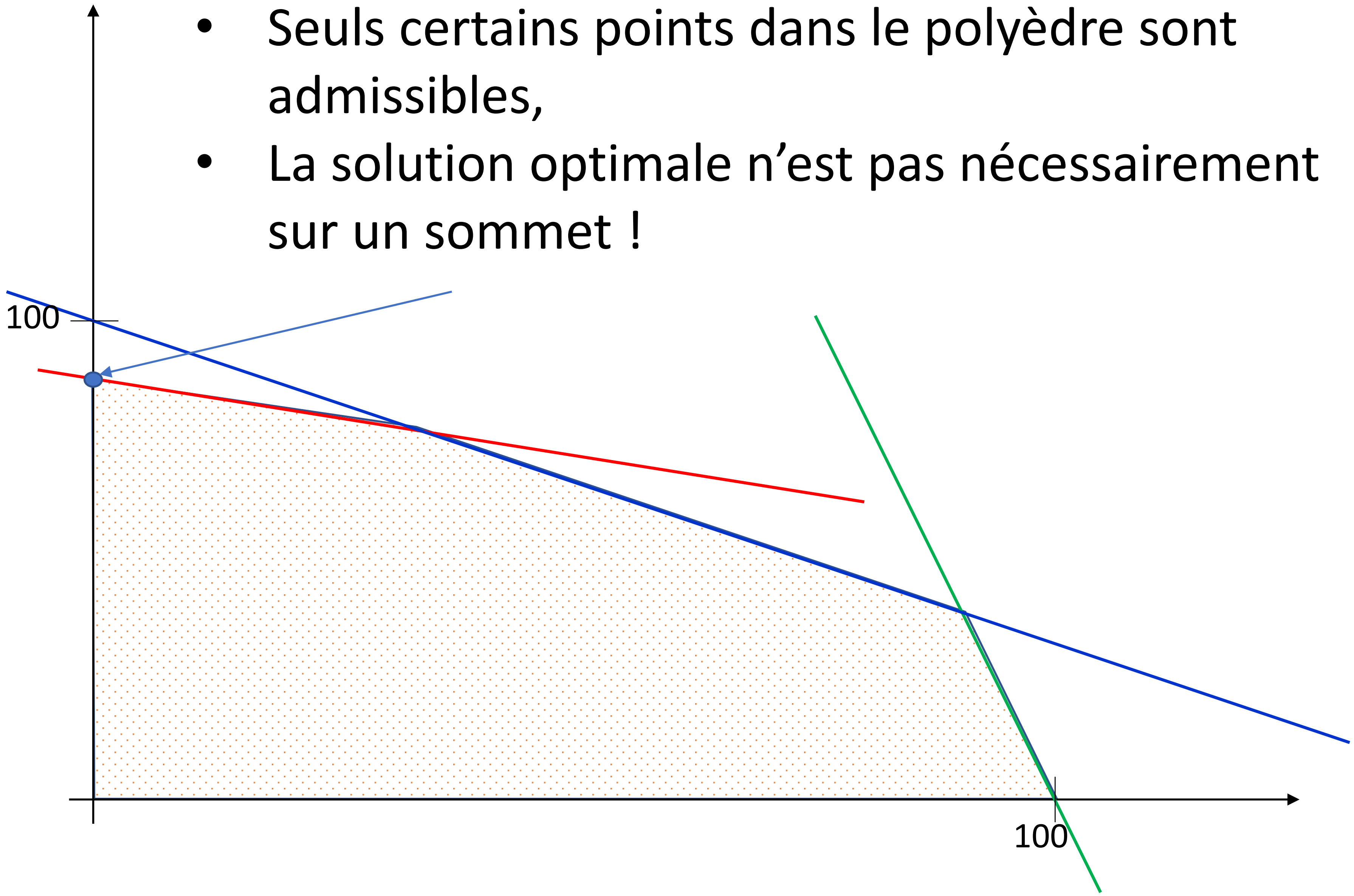
Programme linéaire standard :

- Chaque point dans le polyèdre est admissible,
- La solution optimale est sur un sommet



Programme linéaire en nombre entiers :

- Seuls certains points dans le polyèdre sont admissibles,
- La solution optimale n’est pas nécessairement sur un sommet !



# PLNE vs PL : Propriétés

Notons PLNE un programme linéaire en nombre entiers et PL son équivalent en nombre réel

- PL s'appelle la ***relaxation linéaire*** de PLNE (la contrainte d'intégralité est «relâchée»),

- Toute solution de PLNE est solution de PL,

- Si $\vec{x}^*_{PL}$ est la solution optimale de PL, alors

$$f(\vec{x}^*_{PL}) \leq f(\vec{x}^*_{PLNE})$$

Autrement dit, la solution de PL est une ***borne inférieure*** de PLNE (! Nous parlons de problèmes de MINIMISATION !)

# PLNE vs PL : Propriétés (suite)

- Si $\vec{x}^*_{PL}$ est admissible pour PLNE, alors $\vec{x}^*_{PL} \in \mathbb{N}^n$ est également une solution optimale de PLNE,

- Trouver la solution optimale de PLNE est plus complexe que trouver la solution de PL

Théorie de la complexité :

- Il existe un algorithme en temps polynômial pour résoudre PL,

- PLNE est un problème non-polynômial (dans le cas général).

# PLNE : Méthodes de résolution

Il existe 2 méthodes principales pour résoudre PLNE, se basant sur PL :

I. Recherche du polyèdre admissible «*entier*»

II. Ajout de contraintes

III. Branch-and-bound

IV. Méthod hypbride (Branch-Cut-And-Bound).

De plus, on peut utiliser la solution optimale de LP pour trouver une solution approchée de PLNE !

# Algorithme vs Heuristique

Par convention, nous considérons qu'un algorithme d'optimisation trouve la solution optimale ainsi que la preuve que ladite solution est optimale.

A contrario, une ***heurisitque*** est une méthode d'approximation de la solution optimale. De ce fait :

- Nous n'avons pas de garantie que la solution trouvée par l'heuristique soit optimale,
- Si on trouve une solution via l'heuristique, nous trouvons une borne supérieure au problème :

$$f(\vec{x}^*_{PLNE}) \leq f\left(\vec{x}_{heuristique}\right).$$

# PLNE : Heuristique d'arrondi

Supposons que nous trouvons la solution optimale fractionnaire avec valeur $f(\vec{x}^*_{PL})$ et qu'avec une méthode d'arrondi des solutions, nous trouvions une solution entière $\vec{x}_{heur}$ qui est solution admissible de $PLNE$.

Alors si $f(\vec{x}^*_{PL}) = f(\vec{x}_{heur})$, $\vec{x}_{heur}$ est la solution optimale à PLNE (prouvée optimale !).

Si $f(\vec{x}^*_{PL}) < f(\vec{x}_{heur})$, nous pouvons mesurer ***l'écart à l'optimum (optimality gap)***: dans le pire des cas, il existe une solution à PLNE telle que $f(\vec{x}^*_{PLNE}) = f(\vec{x}^*_{PL})$ (l'optimum de PLNE et égal à celui de PL – il ne peut être meilleur !).

# PLNE : Heuristique d'arrondi

Nous savons donc que nous sommes au pire à

$$\delta = \frac{|f(\vec{x}_{heur}) - f(\vec{x}^*_{PLNE})|}{|f(\vec{x}^*_{PLNE})|} \times 100\ [\%]$$

de l'optimum!

$\delta$ est appelé l'écart à l'optimum (optimality gap).

# PLNE : Recherche du polyèdre entier

L'idée ici est de trouver le polyèdre $I$ «entier» inclus dans le polyèdre $P$ des solutions admissibles en nombre réels, tel que

1. $I$ contient toutes les solutions entières contenues dans $P$,
2. Tous les sommets de $I$ sont une solution entière.

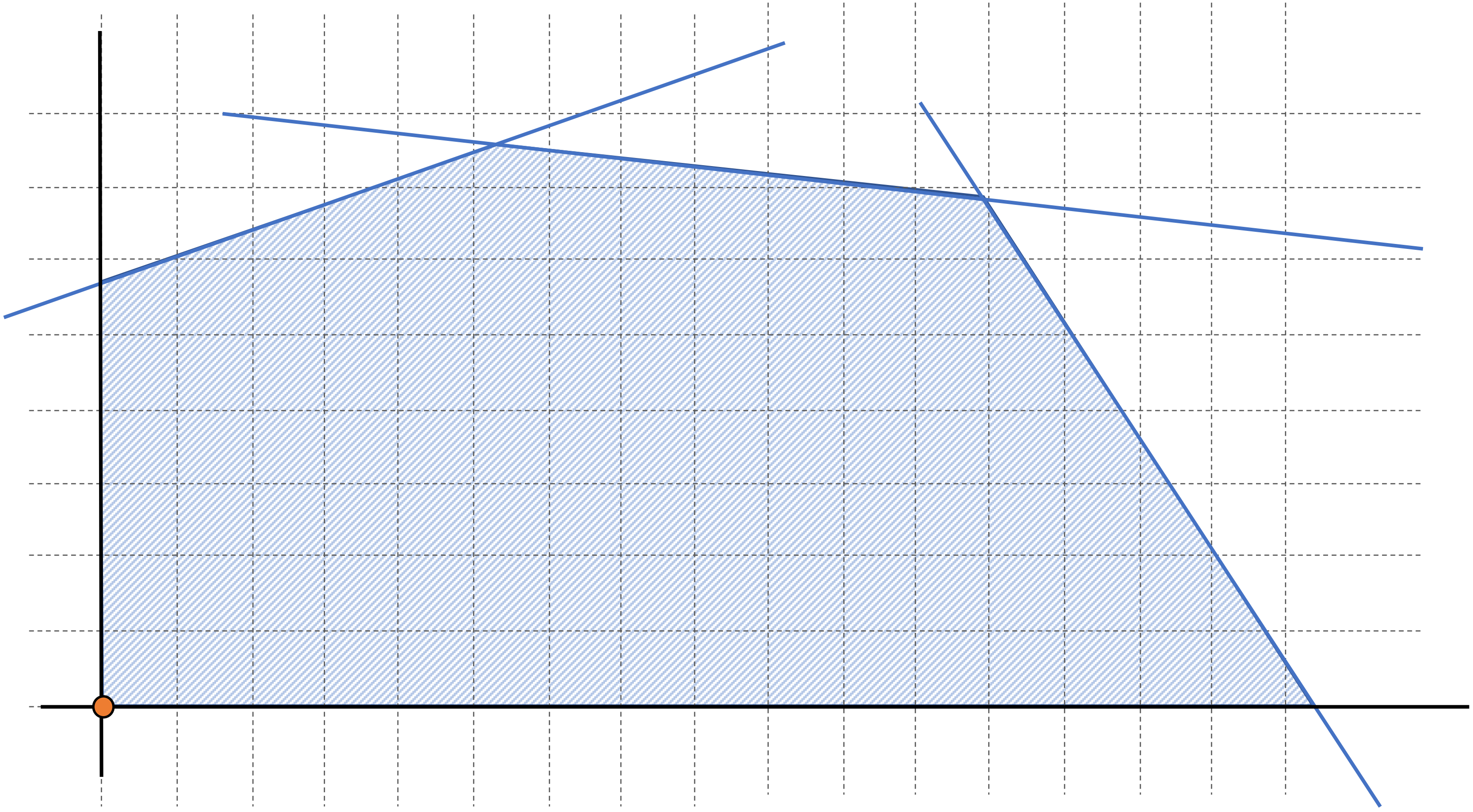
$I$ est parfois appelé «*l'envelope convexe entière*» de $P$.

<u>Proposition :</u>
Pour tout polyèdre de solutions admissibles $P$, il existe toujours un $I \subseteq P$ tel que

- Si $P = \emptyset$ alors $I = \emptyset$,
- Si $P \neq \emptyset$ est borné alors soit $I = \emptyset$ ou $I$ est non-vide et borné,
- Si $P$ est non-borné, $I$ les 3 cas peuvent survenir.

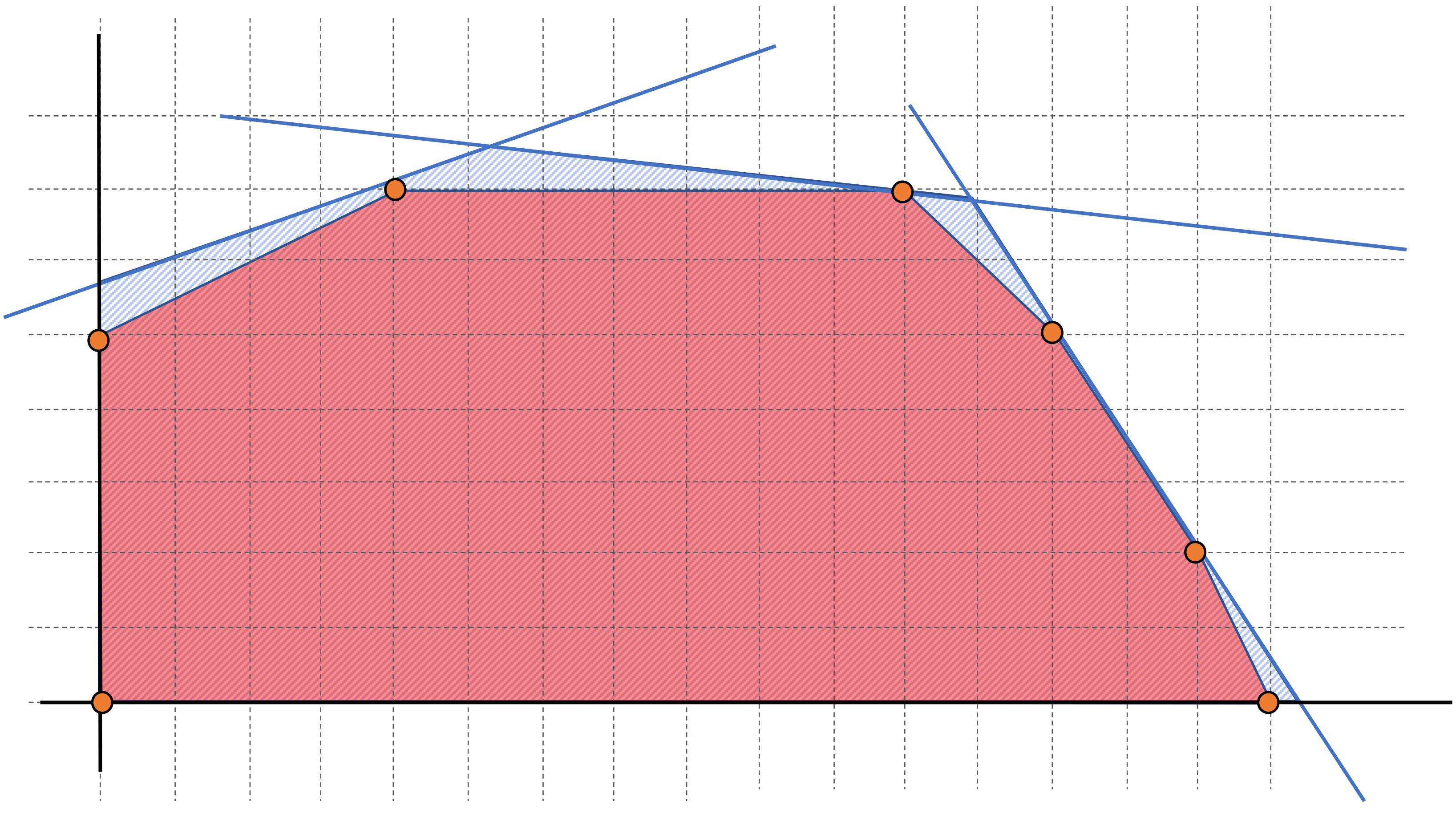
# PLNE : Recherche du polyèdre entier

Polyèdre des solutions admissibles réelles $P$



# PLNE : Recherche du polyèdre entier

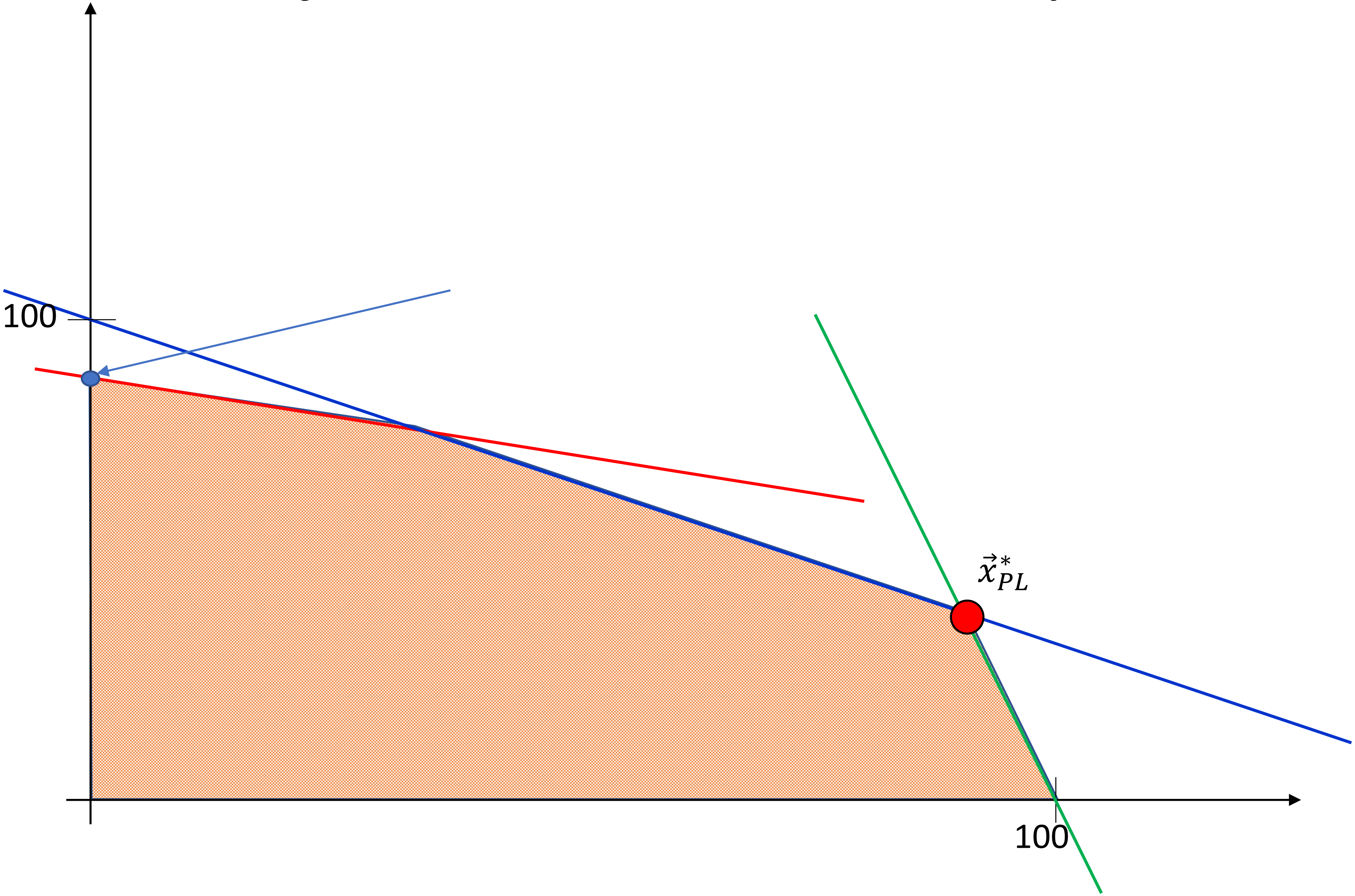
Envelope convexe entière $I \subseteq P$



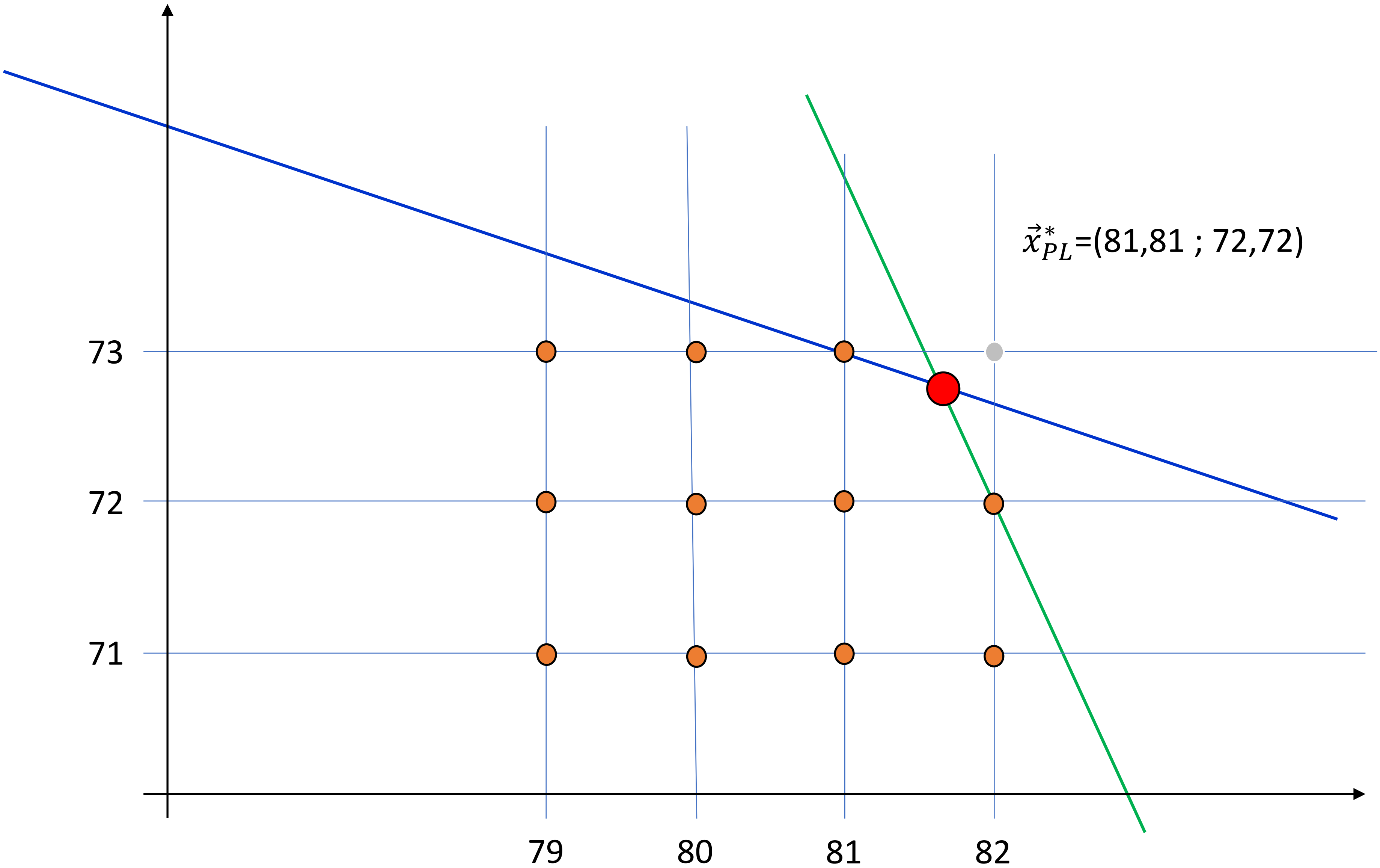
# PLNE : Ajout de contrainte

L'idée de l'ajout des contraintes est de résoudre PL et, si la solution n'est PAS entière, d'ajouter des contraintes excluant la solution $\vec{x}^*_{PL}$ mais n'excluant aucune solution admissible de PLNE.

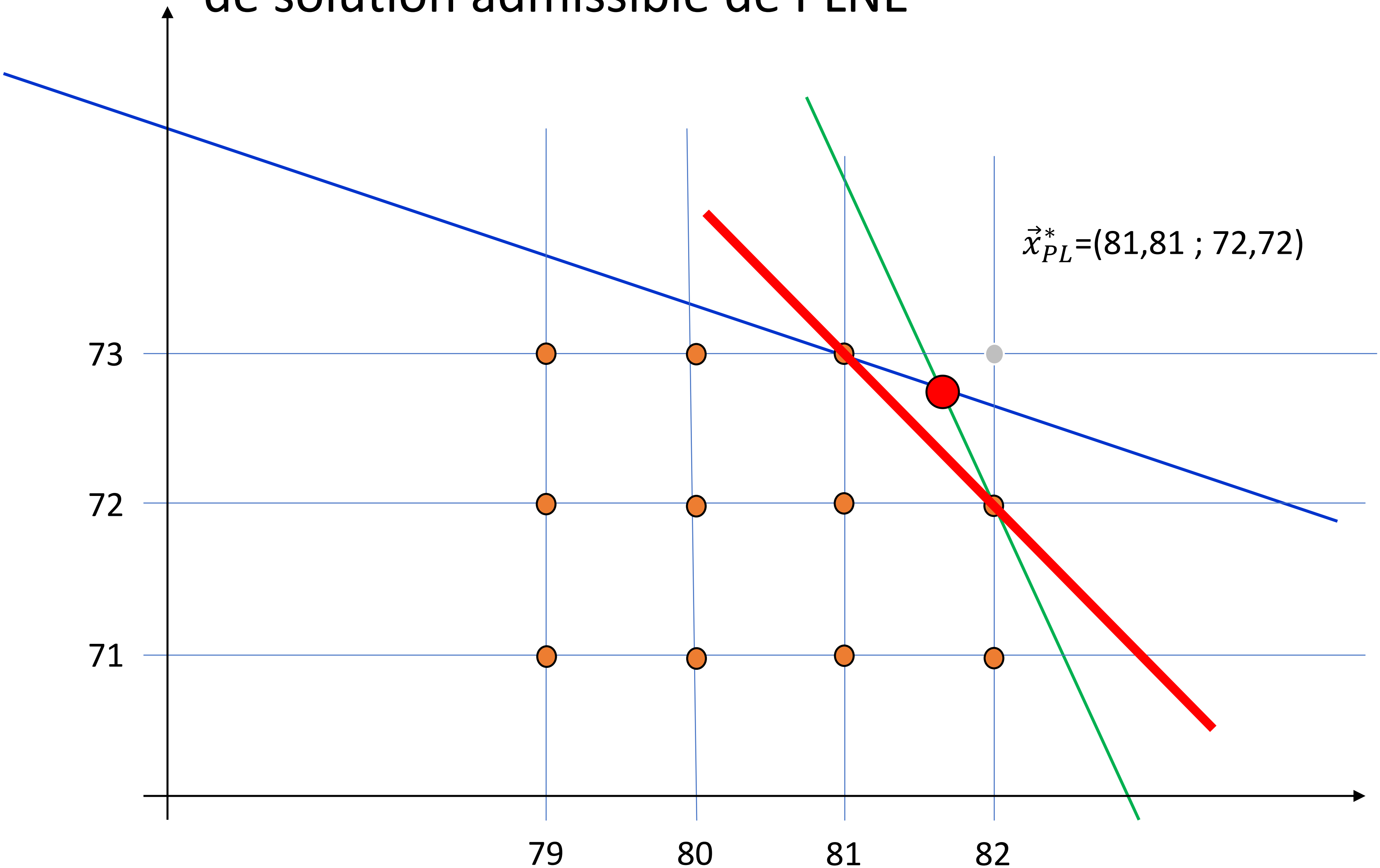
# PLNE : Ajout de contrainte - exemple



# Zoomons sur la solution optimale



# Ajout d'une contrainte éliminant $\vec{x}^*_{PL}$ sans supprimer de solution admissible de PLNE



# PLNE : Ajout de contrainte

La nouvelle contrainte est définie par les deux points suivants, dérivés de $\vec{x}^*_{PL}$=(81,81 ; 72,72) :

$\vec{x}^+$=(82 ; 72) et $\vec{x}^-$=(81 ; 73)

NOTE: les deux points ci-dessus ne sont pas nécessairement admissibles. L'idée est de trouver les deux premiers points entiers ADMISSIBLES afin de définir la contrainte !

Nous rappelons qu'ajouter une contrainte revient à couper le polyèdre par un hyperplan – d'où le nom de «***méthode des plans sécants***».

# PLNE : Méthode des plans sécants

ATTENTION: avec $M$ contraintes, le polyèdre des solutions admissibles est de dimension $M$ ! Il faut donc trouver $M$ points entiers pour trouver l'hyper-plan correspondant à la contrainte !

Dans le cas ***général***, trouver un hyper-plan qui élimine une solution fractionnaire SANS pour autant supprimer de solution entière est un problème difficile à résoudre !

Il existe certaines méthodes générant des contraintes pour un sous-ensemble de variables (p.ex. Gomory cuts), mais ceux-ci ne garantissent pas que les sommets soient toujours des solutions entières.

# PLNE : Méthode des plans sécants

<u>Avantages :</u>

- Amélioration de la borne inférieure de $f(\vec{x}_{PL}^{*})$,
- Possibilité de tomber sur une solution entière après ajout de la contrainte

<u>En pratique :</u>

- Il n'est pas fréquent que l'ajout d'une contrainte standard mène directement à une solution entière !

# PLNE : Branch-and-Bound

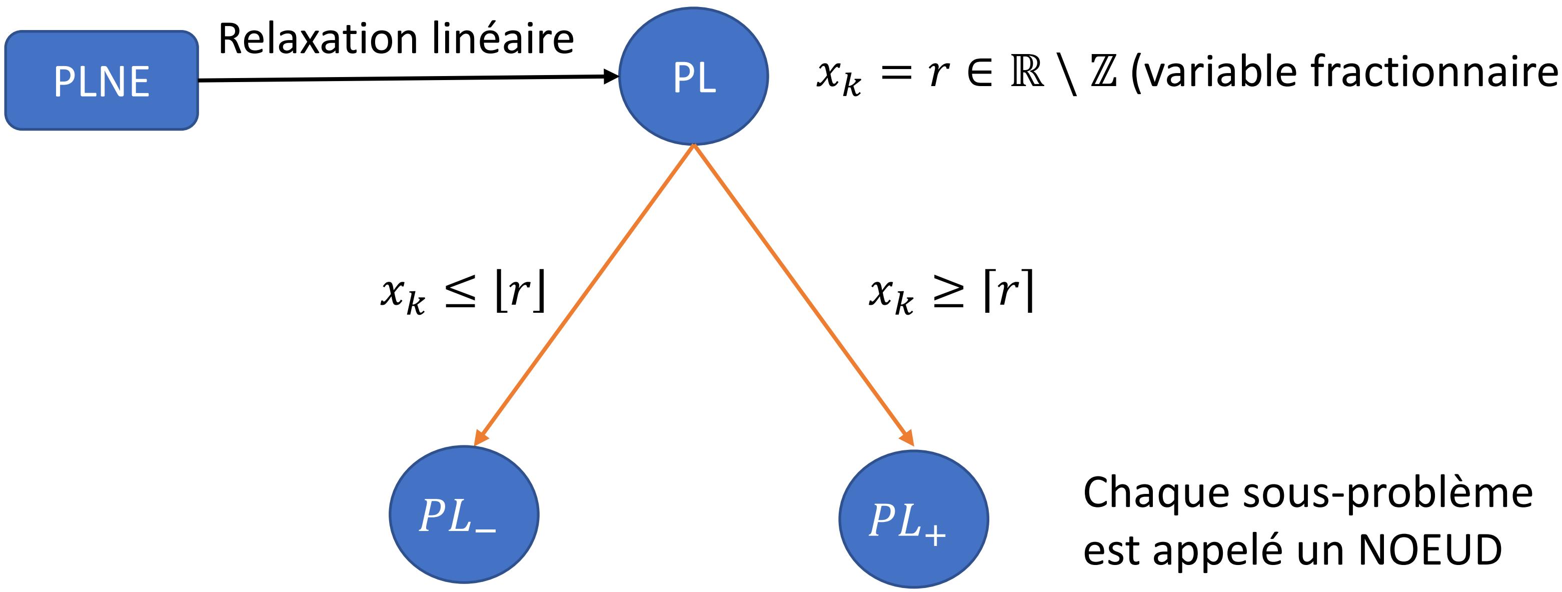
L'idée est de faire un arbre d'exploration des solutions de PLNE basé sur la résolution de PL.

A chaque fois qu'une solution fractionnaire $x_k = r$ est trouvée, on créé 2 sous-problèmes en ajoutant les contraintes :

- $PL_-$ : ajout de la contrainte $x_k \leq \lfloor r \rfloor$ et
- $PL_+$ : ajout de la contrainte $x_k \geq \lceil r \rceil$

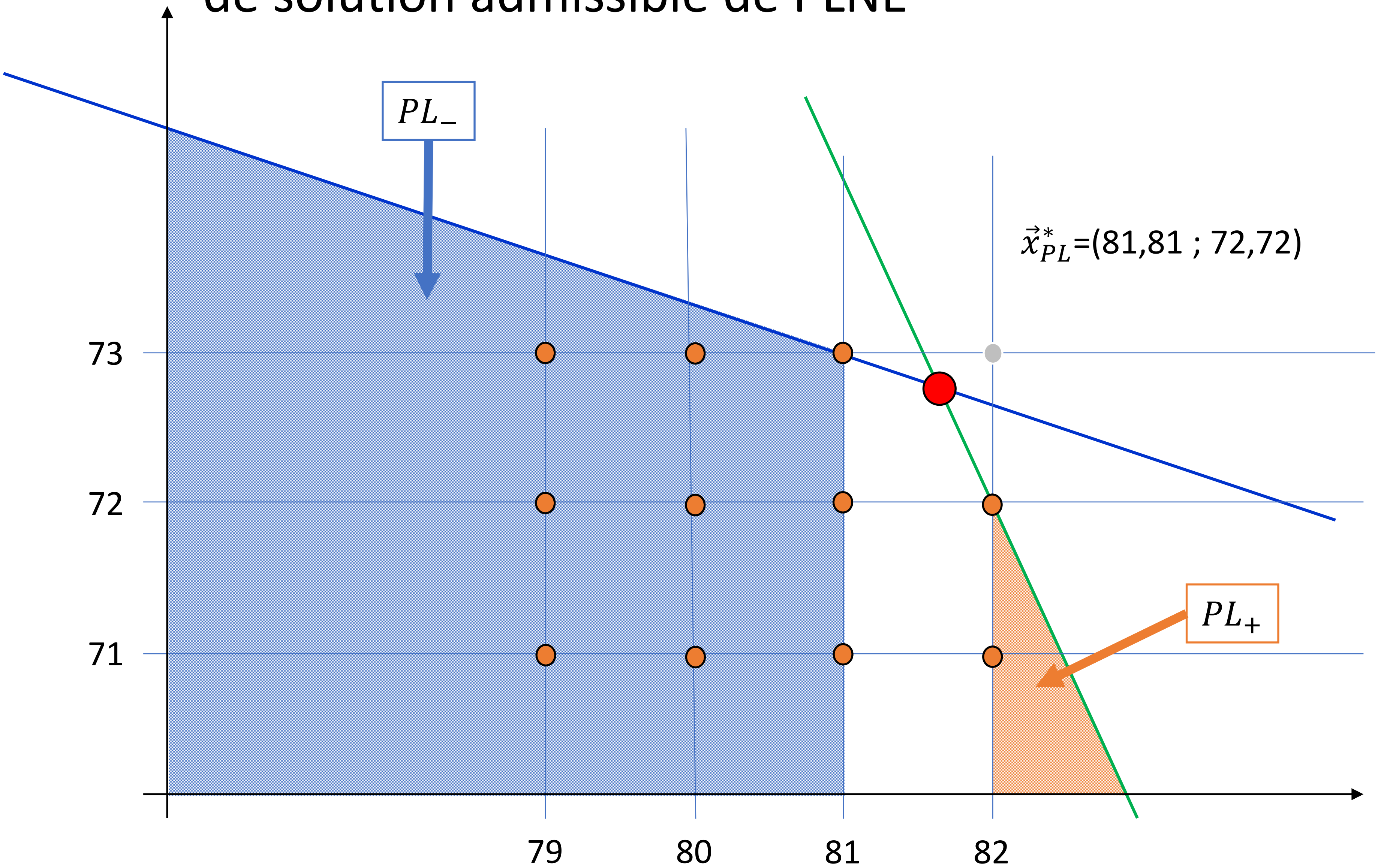
NOTE: $\lfloor r \rfloor$ et $\lceil r \rceil$ sont la valeur entière inférieure, resp. supérieure, de la valeur $r$ (non entière, pour rappel).

# PLNE : Branch-and-Bound




Les sous-problèmes seront ensuite traités indépendamment jusqu'à trouver la solution optimale de PLNE (ou prouver que le problème est non-borné ou n'admet pas de solution entière).

# Ajout d'une contrainte éliminant $\vec{x}^*_{PL}$ sans supprimer de solution admissible de PLNE



# PLNE : Branch-and-Bound

Quelques notes importantes

- L'ensemble des solutions de $PL$ inclut les ensemble des sous-problèmes $PL_-$ et $PL_+$,

- Si $z^*_{PL}$, $z^*_{PL_-}$ et $z^*_{PL_+}$ sont les valeurs respectives de $PL$, $PL_-$ et $PL_+$ alors

  $$z^*_{PL} \leq z^*_{PL_-} \text{ et } z^*_{PL} \leq z^*_{PL_+}$$

NOTE:
Nous sommes toujours dans un problème de minimisation. Autrement dit, la solution de $PL$ est toujours meilleurs (ou égale) aux solutions optimales de $PL_-$ et $PL_+$.

# PLNE : Branch-and-Bound

Résolution itérative :

- Trouver $\vec{x}^*_{PL}$ la relaxation PL de PLNE
  - Si PL n'a pas de solution admissible STOP : PLNE n'a pas de solution admissible ;
  - Si $\vec{x}^*_{PL}$ est une solution entière STOP : $\vec{x}^*_{PL}$ est la solution optimale de PLNE ;
  - Sinon, poser $I = \{LP\}$.
- Définir $z^*_{PLNE} = +\infty$ (aucune solution trouvée)
- Tant que $I \neq \emptyset$ (il existe des nœuds non traités):
  - Trouver $\vec{x}^*_N$ l'optimum du PL (de valeur $z^*_N$) et ôter le nœud $N$ de $I$,
  - Si $\vec{x}^*_N$ est solution entière, définir $z^*_{PLNE} = \min\{z^*_{PLNE}, z^*_N\}$,
  - Sinon, si $\vec{x}^*_N$ est fractionnaire :
    - Si $z^*_N < z^*_{PLNE}$, créer $N_-$ et $N_+$ et ajouter les deux problèmes à $I$,
    - Si $z^*_N \geq z^*_{PLNE}$, ne rien faire (aucune solution entière contenue dans $N$ ne sera meilleurs que la meilleure solution entière trouvée jusque-là).

# Branch-and-Bound – Sous problèmes

Comment résoudre les sous-problèmes ?

Rappelez-vous que pour résoudre un PL avec la méthode du simplexe, il nous faut une SOLUTION INITIALE admissible.

Dans le cas d'un PL sous forme standard avec $\vec{b} \geq \vec{0}$, nous avons vu que la solution $\vec{x} = \vec{0}$ est admissible – toutefois,$\vec{x} = \vec{0}$ ne peux pas être admissible pour $PL_+$!

Comment faire ?

# Branch-and-Bound – Sous problèmes

L'idée est de réutiliser le tableur optimal de PL :

1. Ajouter une contrainte ($x_k \leq \lfloor r \rfloor$ pour $PL_-$ et $x_k \geq \lceil r \rceil$ pour $PL_+$) sous ***forme standard***,
2. Ajouter les éléments au tableau,
3. Ajuster le tableau optimal de PL après ajout des éléments,
4. Trouver une solution admissible au nouveau problème.

# 1. Contrainte sous forme standard

Nous allons ajouter la contrainte $x_k \geq \lceil r \rceil$ pour créer $PL_+$ :

La contrainte a la forme $x_k \geq \lceil r \rceil$ qui, sous forme canonique, donnera $-x_k \leq -\lceil r \rceil$.

Pour transformer cette contrainte sous forme standard, nous pouvons ajouter une variable d'écart ***NEGATIVE*** :

$$-x_k + z_+ = -\lceil r \rceil$$

NOTE: la contrainte pour $PL_-$ sera

$$x_k + z_- = \lfloor r \rfloor$$

# 2. Ajout des éléments dans le tableau

Nous allons ajouter la contrainte suivante au tableau :

$$-x_k + z_+ = -\lceil r \rceil$$

Il faut donc ajouter une colonne ET une ligne au tableau :

nouvelle contrainte => nouvelle ligne
nouvelle variable => nouvelle colonne

La nouvelle colonne correspond à $z_+$ et le seul coefficient non-nul est dans la ligne de la nouvelle contrainte (valeur 1)

La nouvelle ligne correspond à la variable basique $z_+$ et a 2 coefficients non-nuls : -1 pour la colonne correspondant à $x_k$ et 1 pour la (nouvelle) colonne de $z_+$ !

# Illustration – Vendeur de glaces $LP_+$

$x_1 = \frac{900}{11} = 81.81$, alors pour $LP_+$, nous ajoutons la contrainte

$$-x_1 + z_+ = -\lceil r \rceil = -82$$

Ce qui donne le tableau suivant :

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | $\mathbf{z_1}$ | $\mathbf{z_2}$ | $\mathbf{z_3}$ | $\mathbf{z_+}$ | $\vec{\mathbf{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{x_2}$ | 0 | 1 | $2/11$ | 0 | $-2/385$ | **0** | $800/11$ |
| $\mathbf{z_2}$ | 0 | 0 | -17.5 | 1 | 2/7 | **0** | 500 |
| $\mathbf{x_1}$ | 1 | 0 | -35/770 | 0 | 6/385 | **0** | 900/11 |
| $\mathbf{z_+}$ | $\mathbf{-1}$ | **0** | **0** | **0** | **0** | **1** | $\mathbf{-82}$ |
| **f** | 0 | 0 | 805/770 | 0 | 38/385 | **0** | 14500/11 |

Problème : le colonne de la 3ème variable en base n'est PLUS le vecteur $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ ! Le dernier élément devrait être 0 !

# 3. Ajustement du tableau

Premièrement, il nous faut éliminer le coefficient de trop (ligne $z_+$ colonne $x_k$).
Pour ce faire, faisons une élimination de Gauss en posant $\mathbf{Ligne}_{z_+} = \mathbf{Ligne}_{z_+} + 1 \times \mathbf{Ligne}_{x_k}$ :

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | $\mathbf{z_1}$ | $\mathbf{z_2}$ | $\mathbf{z_3}$ | $\mathbf{z_+}$ | $\vec{\mathbf{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{x_2}$ | 0 | 1 | $2/11$ | 0 | $-2/385$ | **0** | $800/11$ |
| $\mathbf{z_2}$ | 0 | 0 | -17.5 | 1 | 2/7 | **0** | 500 |
| $\mathbf{x_1}$ | 1 | 0 | -35/770 | 0 | 6/385 | **0** | 900/11 |
| $\mathbf{z_+}$ | 0 | 0 | $-35/770$ | 0 | $6/385$ | 1 | $\boxed{-2/11}$ |
| $\mathbf{f}$ | 0 | 0 | 805/770 | 0 | 38/385 | **0** | 14500/11 |

Problème : $z_+ = -2/11$, qui n'est PAS une solution admissible.
Nous devons impérativement avoir $z_+ \geq 0$

# Note: Tableau ajusté – cas général

Après ajout des contraintes, nous avons vu qu'après ajout d'une contrainte, il faut encore rétablir la base avec

$$\text{Ligne}_{z\_} = \text{Ligne}_{z\_} - 1 \times \text{Ligne}_{x_k}$$
$$\text{Ligne}_{z_+} = \text{Ligne}_{z_+} + 1 \times \text{Ligne}_{x_k}$$

Les éléments de la nouvelle ligne du tableau sont dont

$$\text{Ligne}_{z\_}[j] = \begin{cases} 0 & \text{si } j = k \\ 1 & si\ j = n + m \text{ (index nouvelle colonne)} \\ -\text{Ligne}_{x_k}[j] & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Ligne}_{z\_}[j] = \begin{cases} 0 & \text{si } j = k \\ 1 & si\ j = n + m \text{ (index nouvelle colonne)} \\ +\text{Ligne}_{x_k}[j] & \text{sinon} \end{cases}$$

# 3. Ajustement du tableau

Il est NORMAL que la solution ne soit pas admissible : rappelez-vous que nous avons volontairement ajouté une contrainte qui élimine des solutions admissibles l'optimum de PL !!!

Que faire ?

Utiliser l'algorithme du simplexe… en pivotant sur les LIGNES !!!

NOTE: cela correspond à la méthode du simplexe sur le problème dual (la théorie de la dualité ne sera pas abordée dans ce cours !).

# 3. Pivot dual

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | $\mathbf{z_1}$ | $\mathbf{z_2}$ | $\mathbf{z_3}$ | $\mathbf{z_+}$ | $\vec{\mathbf{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{x_2}$ | 0 | 1 | 2/11 | 0 | −2/385 | **0** | 800/11 |
| $\mathbf{z_2}$ | 0 | 0 | -17.5 | 1 | 2/7 | **0** | 500 |
| $\mathbf{x_1}$ | 1 | 0 | -35/770 | 0 | 6/385 | **0** | 900/11 |
| $\mathbf{z_+}$ | 0 | 0 | −35/770 | 0 | 6/385 | 1 | $\boxed{\text{-2/11}}$ |
| **f** | 0 | 0 | 805/770 | 0 | 38/385 | **0** | 14500/11 |

Ligne sortante ***i*** => ligne de $\mathbf{z_+}$ (1$^{\text{ère}}$ ligne pour laquelle la valeur est < 0) !

Colonne entrante : colonne dans la ligne $\mathbf{z_+}$ dont le coefficient est strictement NEGATIF et qui maximise la ratio

$\theta = \frac{c_j}{A_{ij}}$ (où $c_j$ est le coût réduit de la colonne $j$).

# 3. Pivot dual

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | $\mathbf{z_1}$ | $\mathbf{z_2}$ | $\mathbf{z_3}$ | $\mathbf{z_+}$ | $\vec{\mathbf{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{x_2}$ | 0 | 1 | $2/11$ | 0 | $-2/385$ | **0** | $800/11$ |
| $\mathbf{z_2}$ | 0 | 0 | -17.5 | 1 | $2/7$ | **0** | 500 |
| $\mathbf{x_1}$ | 1 | 0 | -35/770 | 0 | $6/385$ | **0** | $900/11$ |
| $\mathrm{z}_+$ | 0 | 0 | $\mathbf{-35/770}$ | 0 | $6/385$ | 1 | -2/11 |
| **f** | 0 | 0 | $805/770$ | 0 | $38/385$ | **0** | $14500/11$ |
| $\theta = c_j/A_{4j}$ (si $A_{4j} < 0$) | $-$ | $-$ | -23 | $-$ | $-$ | $-$ | |

PIVOT

La colonne de $z_1$ entre en base et la variable $z_+$ quitte la base.

# 3. Effectuer le pivot

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | $\mathbf{z_1}$ | $\mathbf{z_2}$ | $\mathbf{z_3}$ | $\mathbf{z_+}$ | $\vec{\mathbf{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{x_2}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 30/77 | 4 | 72 |
| $\mathbf{z_2}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | -264/7 | -385 | 570 |
| $\mathbf{x_1}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | -32/385 | -1 | 82 |
| $\mathbf{z_1}$ | 0 | 0 | **1** | 0 | $-76/35$ | $-22$ | 4 |
| **f** | 0 | 0 | 0 | 0 | 874/385 | 23 | 1314 |

La nouvelle solution correspond à $x_1 = 82$, $x_2 = 72$.

$$f = -9 \times 82 - 8 \times 72 = -1314$$

Il reste $z_1 = 4$ litres de lait, $z_2 = 570$ grammes de cacao, et toute la vanille est utilisée ($z_3 = 0$ car $z_3$ est hors-base) !

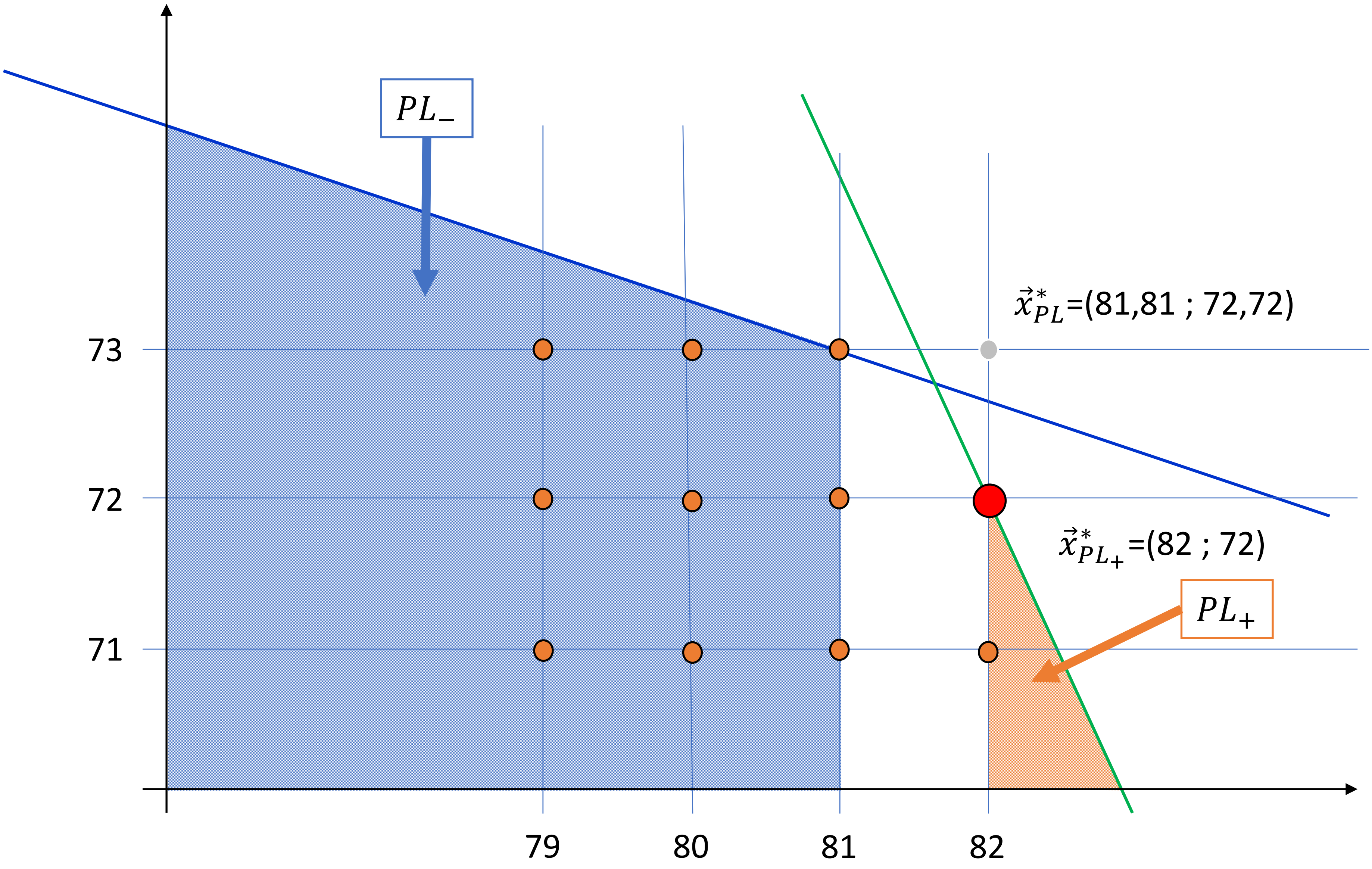
La solution est OPTIMALE pour $PL_+$ et c'est une solution entière !

# 3. Pivot dual

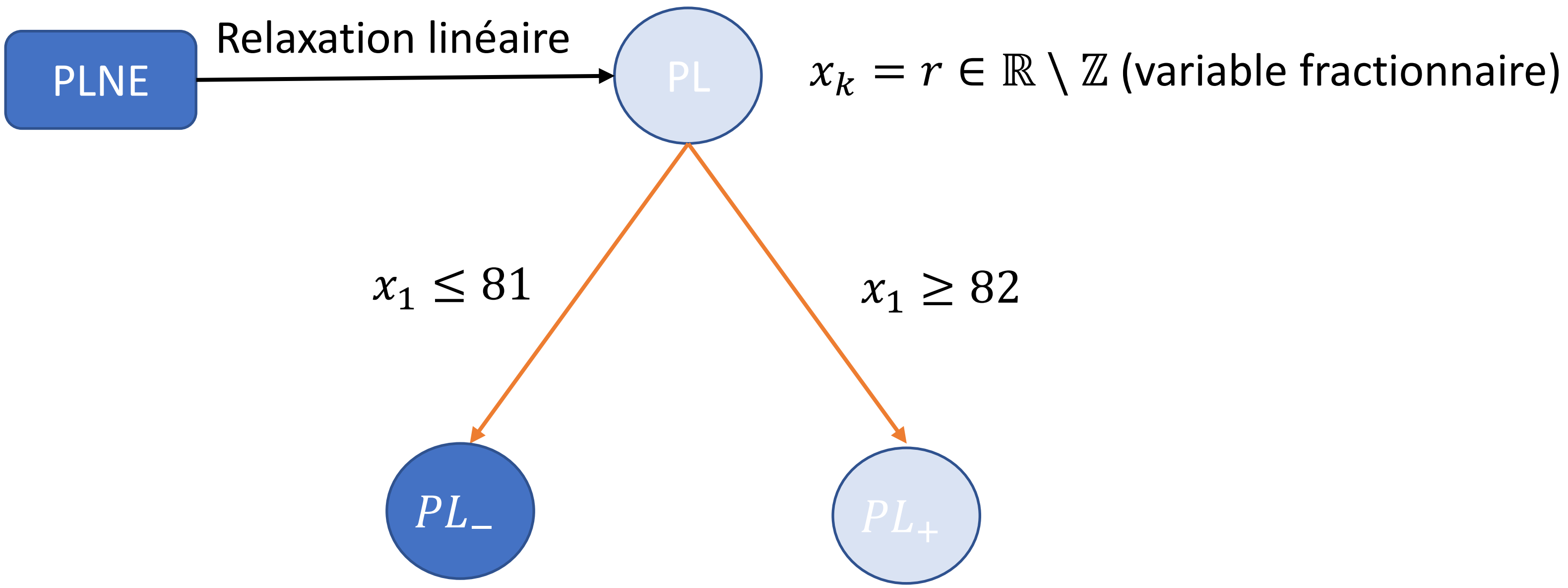
Note :

- Si tous les éléments de la colonne de droite (correspondant à $\vec{b}$) sont $\geq \mathbf{0}$ => on a une solution admissible, retour vers la méthode standard (primale, par colonnes),
- S'il existe une ligne sortante $(b_i < 0)$ et tous les éléments de la ligne sortante $i$ sont $\mathrm{A}_{\mathbf{ij}} \geq \mathbf{0}$ STOP => le problème n'a pas de solution admissible (le dual est non borné),
- Trouver la colonne entrante $j$ avec $A_{ij} < 0$ qui minimise le rapport $\theta = \frac{-c_j}{A_{ij}}$ (ou maximise $\frac{c_j}{A_{ij}}$).

# Résolution de $LP_+$



# PLNE : Branch-and-Bound




Après résolution de $PL$ et $PL_+$, nous avons trouvé une solution entière de valeur $z^*_{PLNE} = -1314$.

Reste à trouver la solution de $PL_-$ !

# Exercice:

Etant le tableau optimal de $PL$ suivant, calculez la solution optimale de $PL\_$ en ajoutant la contrainte

$$x_1 + z\_ = 81$$

| | $\boldsymbol{x_1}$ | $\boldsymbol{x_2}$ | $\boldsymbol{z_1}$ | $\boldsymbol{z_2}$ | $\boldsymbol{z_3}$ | $\vec{\boldsymbol{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{x_2}$ | $0$ | $1$ | $2/11$ | $0$ | $-2/385$ | $800/11$ |
| $\boldsymbol{z_2}$ | $0$ | $0$ | -17.5 | $1$ | 2/7 | 500 |
| $\boldsymbol{x_1}$ | $1$ | $0$ | -35/770 | $0$ | 6/385 | 900/11 |
| $\boldsymbol{f}$ | $0$ | $0$ | 805/770 | $0$ | 38/385 | 14500/11 |

# Solution

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | $\mathbf{z_1}$ | $\mathbf{z_2}$ | $\mathbf{z_3}$ | $\mathbf{z_-}$ | $\vec{\mathbf{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{x_2}$ | 0 | 1 | 0.167 | 0 | 0 | -0.333 | 73 |
| $\mathbf{z_2}$ | 0 | 0 | -16.67 | 1 | 0 | 18.333 | 485 |
| $\mathbf{x_1}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 81 |
| $\mathbf{z_3}$ | 0 | 0 | -2.917 | 0 | 1 | -64.17 | 52.5 |
| **f** | 0 | 0 | 1.333 | 0 | 0 | 6.333 | 1313 |

Le pivot se fait sur la colonne correspondant à $z_3$ !

La nouvelle solution correspond à $x_1 = 81$, $x_2 = 73$.

$$f = -9 \times 81 - 8 \times 73 = -1313$$

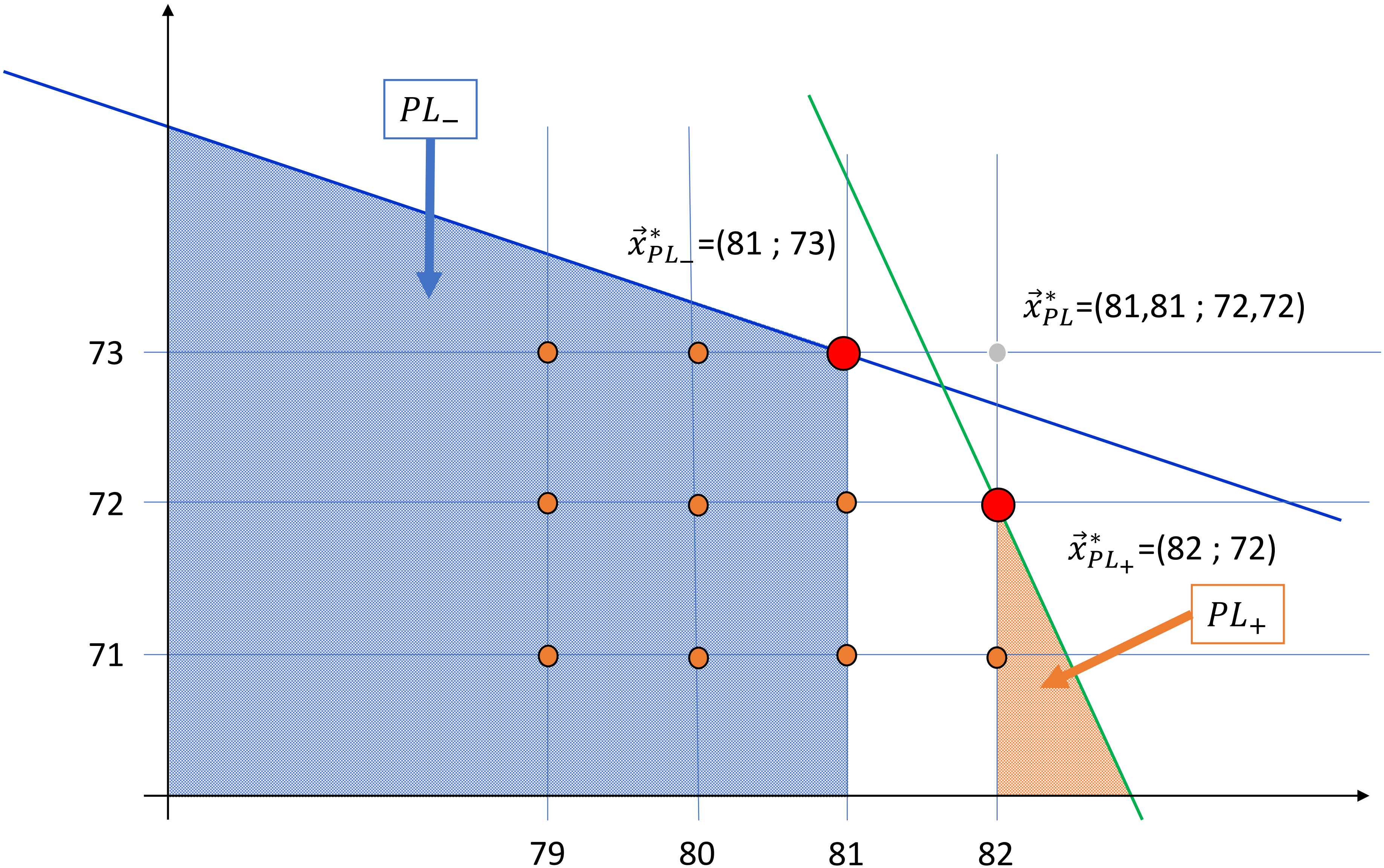
Il reste $z_2 = 485$ grammes de cacao, $z_3 = 52.5$ grammes de vanille et tout le lait est utilisée ($z_1 = 0$ car $z_1$ est hors-base) !

La solution est OPTIMALE pour $PL_-$ et c'est une solution entière !

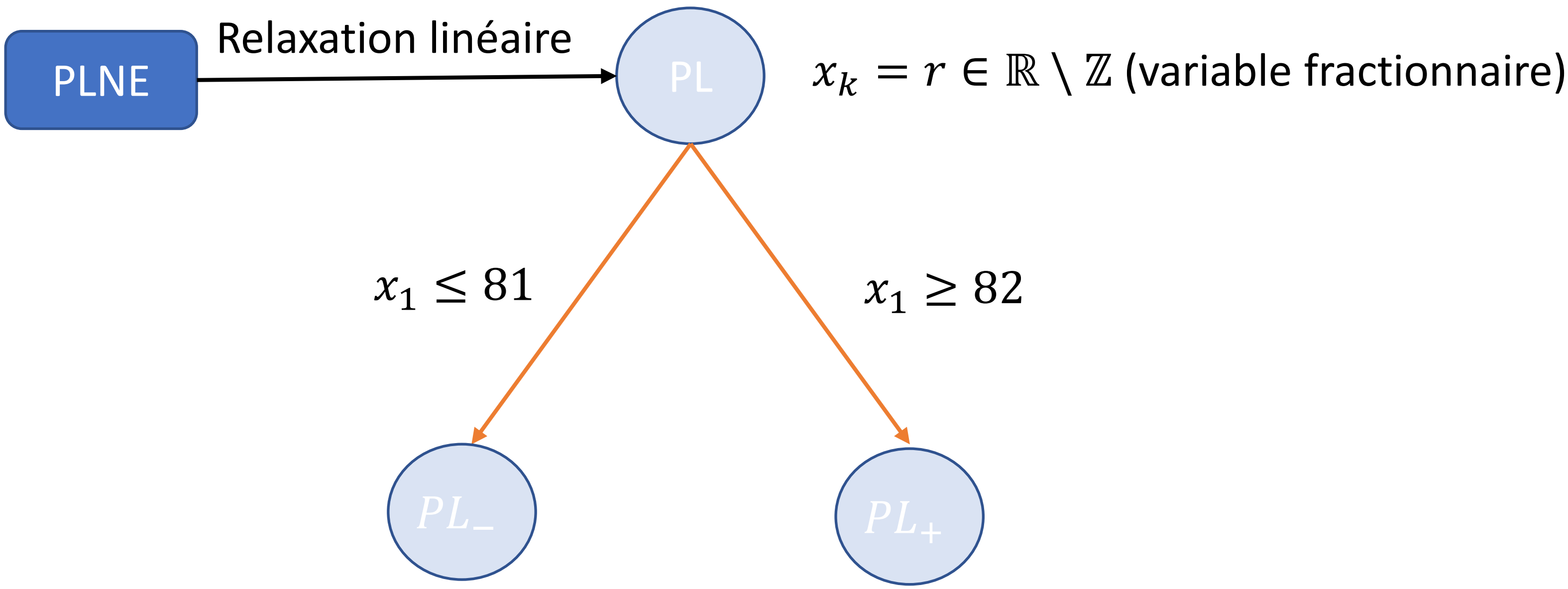
# Solution - algébriquement

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_2}$ | $\mathbf{z_1}$ | $\mathbf{z_2}$ | $\mathbf{z_3}$ | $\mathbf{z_-}$ | $\vec{\mathbf{b}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{x_2}$ | 0 | 1 | 1/6 | 0 | 0 | -1/3 | 73 |
| $\mathbf{z_2}$ | 0 | 0 | -50/3 | 1 | 0 | 55/3 | 485 |
| $\mathbf{x_1}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 81 |
| $\mathbf{z_3}$ | 0 | 0 | -35/12 | 0 | 1 | -385/6 | 105/2 |
| **f** | 0 | 0 | 4/3 | 0 | 0 | 19/3 | 1313 |

# Résolution de $LP_+$



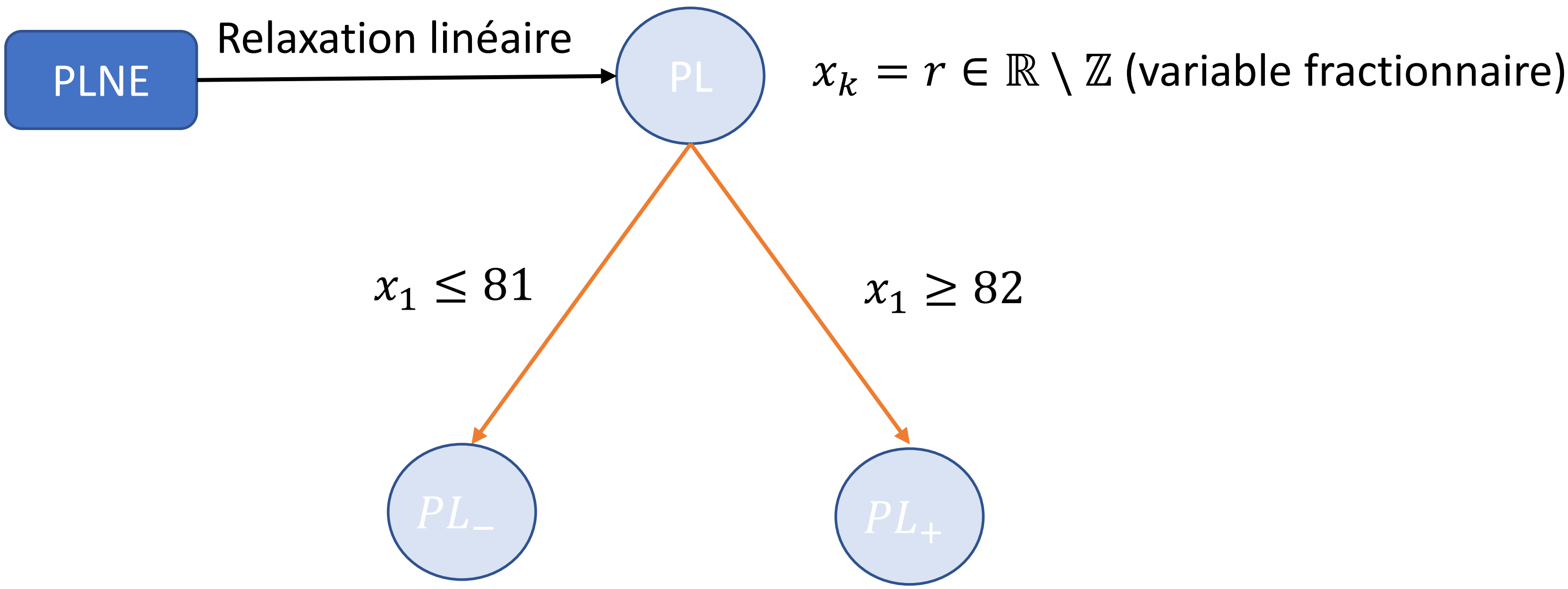
# PLNE : Branch-and-Bound




Après résolution de $PL$, $PL_+$ et $PL_-$, nous avons trouvé une solution entière de valeur $z^*_{PLNE} = -1314$.

La solution de $z^*_{PL_-} > z^*_{PLNE}$, donc on ignore le nœud $PL_-$ ainsi que tous ses (éventuels) descendants !

# PLNE : Branch-and-Bound




Ici, nous avons exploré tous les nœuds.
La solution optimale de $PLNE$ est donc $(81{,}71)$ et a un profit de $z^*_{PLNE} = -1314$, et la solution est trouvée au nœud $PL_+$ (le nœud $PL_-$ est «dominé» par $PL_+$ et peut donc être éliminé).